Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Les structures flexibles interviennent, notamment, dans les « grandes » structures spatiales et dans les robots flexibles. Ces structures doivent être contrôlées (stabilisées) par des contrôles qui s'exercent généralement sur des parties du bord ou de manière ponctuelle. On est aussi conduit au contrôle de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles où les opérateurs différentiels intervenant dans le modèle sont du type

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \text{ (opérateur des ondes), ou } \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2.$$

(On se borne, pour l'instant, au cadre linéaire.)

Cela conduit à un certain nombre de questions tout à fait naturelles sur ces opérateurs et les divers problèmes aux limites qui leurs sont attachés. Questions qui, néanmoins, n'ont pas été considérées jusqu'ici de manière systématique.

Nous donnons dans le résumé qui suit quelques exemples de problèmes résolus dans ces directions.

2. Dans le cylindre

$Q = \Omega \times]o, T[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné de frontière Γ régulière,
$t \in]o, T[$, t = temps,

considérons l'équation

(1) $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = f$$

avec

(2) $$\Phi = 0 \text{ sur } \Sigma = \Gamma \times]o, T[,$$

et

$$\Phi(x, o) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, o) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{3}$$

On sait que si $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ (i.e. $\int_0^T \left(\int_\Omega f(x, t)^2\, dx\right)^{1/2} dt < \infty$) alors les fonctions $\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ sont continues de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$.

On peut en outre démontrer (cela a été exposé dans le cours de 1982-1983) par une variante d'une ancienne méthode de Rellich pour des problèmes elliptiques, que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma) \tag{4}$$

(où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ = dérivée normale à Γ, dirigée, pour fixer les idées, vers l'extérieur de Ω).

On peut, à partir de là, démontrer (par transposition) le résultat suivant : si l'on considère l'*équation d'état*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = f \text{ dans } Q,\ f \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \tag{5}$$

avec

$$y = v \text{ sur } \Sigma,\ v = \textit{contrôle} \text{ appartenant à } L^2(\Sigma) \tag{6}$$

et

$$y(x, o) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, o) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{7}$$

alors $y = y(x, t; v) = y(v)$ (l'*état du système* correspondant au contrôle v) *est continu de* $[0, T] \to L^2(\Omega)$.

Cette propriété est « optimale », au sens : quel que soit f donné dans $L^1(0, T; L^2(\Omega))$, il existe $v \in L^2(\Sigma)$ tel que $y(v)$ ne soit pas continu de $[0, T] \to H^\varepsilon(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit ($H^\varepsilon(\Omega)$ est l'espace des fonctions sur Ω qui sont dans $L^2(\Omega)$ ainsi que leurs dérivées d'ordre ε ce qui est défini à l'aide, par ex., de la transformation de Fourier).

Remarque

Signalons que la question analogue pour le cas où l'on remplace la condition de Dirichlet par celle de Neumann : $\frac{\partial y}{\partial \nu} = v$ sur Σ, n'est pas résolue. Cela n'empêche pas de faire des calculs numériques d'approximation dans les situations correspondantes, mais les calculs sont conduits formellement. □

Si l'on considère

$$\mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé de } L^2(\Sigma), \tag{8}$$

et si l'on introduit la *fonction coût*

$$J(v) = \int_\Omega [y(x, T; v) - z_d(x)]^2 \, dx + N \int_\Sigma v^2 \, d\Sigma, \tag{9}$$

$$z_d \text{ donnée dans } L^2(\Omega), \ N \text{ donné} > 0,$$

le problème

$$\inf. J(v), \ v \in \mathcal{U}_{ad}, \tag{10}$$

admet une solution unique u *(le contrôle optimal).*

Cette fonction u est caractérisée par le système d'optimalité

$$(11) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = f, \quad \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \ \text{ dans } Q, \\[2ex] y = u, \ p = 0 \ \text{ sur } \Sigma, \\[2ex] y(x, o) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, o) = 0, \ p(x, T) = 0, \ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x, T) \\[2ex] = y(x, T) - z_d(x) \end{array} \right.$$

avec

$$(12) \quad \left| \begin{array}{l} \displaystyle\int\!\!\int_\Sigma \left(\frac{\partial p}{\partial \nu} + Nu \right) (v - u) \, d\Sigma \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}, \\[2ex] u \in \mathcal{U}_{ad}. \ \square \end{array} \right.$$

On a démontré dans le cours des résultats de régularité complémentaire. *Par ex.* si f vérifie

$$f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q), \tag{13}$$

alors la solution Φ de (1) (2) (3) vérifie

(14) $$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} \in H^1(\Sigma) \\ \text{(i.e. la dérivée en t de } \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} \text{ et toutes les dérivées premières} \\ \text{tangentielles à } \Sigma \text{ dans } L^2(\Sigma)). \end{array} \right.$$

3. On a ensuite considéré le cas où le contrôle est *ponctuel,* i.e. où le modèle est

(15) $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = v(t)\, \delta(x - b) \text{ dans } Q,\ b \text{ donné dans } \Omega,\ \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

avec

(16) $$y = 0 \text{ sur } \Sigma$$

et (7).

Alors si $v \in L^2(0, T)$, *la solution* $y = y(v)$ de (15) (16) (7) *est continue de* $[0, T] \to L^2(\Omega)$ (la dimension de l'espace intervient ici, si par ex., $\Omega \subset \mathbb{R}^1$, $y(v)$ est continue de $[0, T] \to H^1(\Omega)$, et $y(v)$ est continue dans des espaces plus grands que $L^2(\Omega)$ si la dimension d'espace est > 3). Ce résultat a été démontré par Y. MEYER (dans le séminaire de 1983-1984) en utilisant des méthodes d'Analyse Harmonique ; nous l'avons redémontré en utilisant les résultats du point 2 et L. NIRENBERG (communication personnelle) en a obtenu une 3^e^ démonstration basée sur la *propriété duale* suivante : si Φ est solution de

(17) $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 0 \text{ dans } Q,$$

avec

(18) $$\Phi = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

(19) $$\Phi(x, o) = 0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, o) = g(x) \text{ dans } \Omega,$$

alors si $g \in L^2(\Omega)$ *on a* $\Phi(b, t) \in L^2(0, T)$.

4. On est ensuite passé à des questions du type précédent pour l'opérateur

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2$$

De nombreux problèmes sont encore ouverts dans ces directions. Nous avons démontré, d'abord dans des cas particuliers puis dans le cas général grâce à une remarque de J. Simon, le résultat suivant : soit Φ solution de

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \Delta^2 \Phi = f \text{ dans } Q, \tag{20}$$

avec

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Sigma. \tag{21}$$

et (3). *Supposons que* f *vérifie* (13) *avec* $f = 0$ *sur* Σ.

Alors

$$\Delta \Phi \big|_{\Sigma} \in L^2(0, T; H^1(\Gamma)) \ (^1) \tag{22}$$

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} \in L^2(\Sigma). \tag{23}$$

5. Nous avons ensuite abordé une question qui sera reprise dans le cours prochain ; il s'agit de la modélisation des plaques bidimensionnelles minces (modèle de Von Karman) à partir de calculs asymptotiques faits sur le modèle tri-dimensionnel, en supposant l'épaisseur petite. On a exposé, de manière un peu différente, un résultat de Ph. Ciarlet sur ce sujet.

Ce type de question sera examiné dans les cours suivants en liaison avec les problèmes de contrôle de structures complexes « pluridimensionnelles ».

Publications

Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators, en collaboration avec I. Lasiecka et R. Triggiani.

Un problème asymptotique en contrôle ponctuel. *Annales Acad. Sc. Fennicae.* Dédié à O. Lehto.

Un exemple de problème aux limites couplé parabolique-hyperbolique pour une structure pluri-dimensionnelle. Dédié à S. Faedo.

---

(1) I.e. $\Delta \Phi$ et les dérivées du 1er ordre spatiales tangentielles à Γ de $\Delta \Phi$ sont dans $L^2(\Sigma)$.

Résultats de régularité par l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2$. Dédié à S. Mizohata.

Publications du Séminaire de Mathématiques Appliquées. Pittman.

Les 5 premiers volumes sont parus. Edités par H. Brézis, D. Cioranescu et J.-L. Lions.

Missions

24-25 septembre 1984. — Conférence au Colloque Stekloff, Moscou Acad. des Sc. U.R.S.S.

4-8 mars 1985. — Conférence au Colloque N.S.F. - N.A.S.A. de Tampa sur le contrôle des grandes Structures Flexibles.

26-27 mars. — Conférence à l'Université de Pavie.

12-13 avril. — Conférence à Madrid.

6-9 mai. — Conférence au Colloque de l'Acad. dei Lincei, Rome.

14-22 mai. — Conférences à l'Univ. de Minnesota, Conférences N. Riviere et à l'Université de Montréal.

11-14 juin. — Conférence au Colloque Optimisation, Capri.

15-17 juillet. — Conférence à Waterloo, Canada, Colloque de l'I.U.T.A.M. sur l'optimisation des structures.

Diverses missions à Kourou, en Europe et aux U.S.A. dans le cadre du C.N.E.S. et de la N.A.S.A.