Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Le cours a porté sur l'analyse et sur le contrôle des systèmes distribués (i.e. modélisés par une, ou plusieurs, équations aux dérivées partielles, linéaires ou non) lorsque *le système est imparfaitement connu.*

Deux types de situations ont été considérés :

(i) la recherche d'une solution *particulière* parmi l'ensemble des solutions possibles lorsqu'il n'y a pas de possibilité de contrôle sur le système ;

(ii) les systèmes sur lesquels une action est possible mais où certaines données sont manquantes, systèmes pour lesquels on a introduit la notion de *contrôle de Pareto.*

2. *Recherche d'une solution particulière*

Considérons un système d'évolution

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f \text{ dans } \Omega \times]O,T[, \ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

où A est un système différentiel elliptique, $y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ représente *l'état* du système. Dans (1) les conditions aux limites sont connues et seulement *une partie* des données initiales est connue. Par ex. si $m = 2$, $y_1 = 0$ si $t = 0$, mais on n'a pas d'informations sur y_2 à $t = 0$. On « compense » ce manque d'informations l'instant $t = 0$ par *des mesures* effectuées à des instants $t_1, \ldots, t_q < T$. Cela veut dire que l'on a des informations sur $y(t_1), \ldots, y(t_q)$. On considère alors l'ensemble $\mathscr{E}$ de toutes les fonctions y solution de (1), vérifiant les conditions aux limites, $y_1(0) = 0$ et les informations sur $y(t_1), \ldots, y(t_q)$. On cherche alors *par exemple*

$$\inf_{y \in \mathscr{E}} \int_\Omega y_2(x,o)^2 \, dx \tag{2}$$

ou

(3) $$\inf_{y \in \mathcal{E}} \int_{\Omega x\,(O.T)} \left| \frac{\partial y_2}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx\, dt.$$

On a donné dans le cours (cf. Bibliographie [1]) les conditions nécessaires, ou nécessaires et suffisantes, exprimant que y réalise le minimum (unique lorsque A est linéaire) de (2) ou de (3). Les conditions dépendent de la nature des informations aux instants $t_1, \ldots, t_q$.

3. *Contrôle de Pareto*

On considère de manière générale un système dont l'état est « donné » par la solution de

(4) $$Ay = f + Bv + \beta g$$

où v parcourt l'espace de Hilbert $\mathcal{U}$ (sur $\mathbb{R}$) *des contrôles* et où g appartient à l'espace de Hilbert F (sur $\mathbb{R}$) des *incertitudes*.

En fait

(5) $$g \in G,\ G = \text{sous espace vectoriel fermé de } F.$$

Si $G = \{O\}$, on a un système « usuel » ; si $G = F$ on n'a pas d'informations sur une partie du système.

On suppose que (4) admet une solution unique ; l'écriture (4) est formelle : dans les applications A peut-être stationnaire ou d'évolution, Parabolique, Hyperbolique ou de Petrowsky ; v (resp g) peuvent intervenir dans les conditions aux limites et, ou, les conditions initiales. Soit y (v,g) la solution de (4).

On considère alors

(6) $$J(v,g) = \| Cy(v,g) - z_z \|^2_{\mathcal{H}} + N \| v \|^2_{\mathcal{U}}$$

où C applique l'espace des états dans un Hilbert réel $\mathcal{H}$ et où z_d est donné dans $\mathcal{H}$, N est donné > 0 et où enfin $\| \ \|_X$ désigne la norme dans X.

Un contrôle de Pareto est obtenu par adaptation au cas de *toutes* les fonctionnelles $v \to J(v,g)$, $g \in G$, de la situation standard des équilibres de Pareto pour un nombre *fini* de fonctionnelles.

On dit en conséquence que le *contrôle* u *est de Pareto* s'il n'existe pas d'élément $v \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(v,g) \leqq J(u,g)\ \forall\, g \in G$$

et

$$J(v,g_o) < J(u,g_o) \text{ pour au moins un } g_o \in G.$$

Un contrôle de Pareto sera dit *relatif* à u_0 si

$$J(u,g) \leqq J(u_0,g) \ \forall \ g \in G.$$

Pour u_0 donné, il existe un contrôle de Pareto relatif à u_0 et un seul.

On a donné dans le cours une série de situations où le contrôle de Pareto u relatif à u_0 peut être caractérisé par *un système d'optimalité.* Dans tous les exposés étudiés, u est caractérisé par la minimisation sur $\mathcal{U}$ de la fonctionnelle $J(u,\lambda)$ pour un élément λ convenable, pris dans un espace fonctionnel $\hat{G}$ complété de G pour une topologie convenable (qui peut être *beaucoup* moins fine que celle induite par F) mais pour lequel $J(u,\lambda)$ (ou, plus précisément, $J(u,\lambda) - J(u_0,\lambda)$) *a un sens.*

Lorsque $\mathcal{U}$ n'est pas un espace vectoriel mais *un ensemble convexe* (dans un espace Hilbertien), le système d'optimalité n'a pu être obtenu jusqu'ici que dans des cas très particuliers.

Bibliographie

[1] *Remarks on systems with incomplete data.* International Symposium on Variational Methods in Geosciences Oklahoma. Octobre 1985.

[2] *Contrôle de Pareto des systèmes distribués. I. Le cas stationnaire. II. Le cas d'évolution.* Notes aux C.R.A.S. et exposé sur ce sujet au colloque I.F.I.P., Gainesville, février 1986.

Exposés

J. Von Neumann Lecture, S.I.A.M., Boston, Juillet 1986. Conférences à Houston, Montréal, Icase (Washington-Nasa), U.C.L.A., Berkeley, Caltech au cours du 1er semestre 1986. Conférences à l'Université de Moscou (mars 1986), Pise (mars 1986), Heriot-Watt à Edimbourg.

Exposés généraux sur divers aspects de la politique spatiale à l'Académie des Sciences Morales, au séminaire du Pr Dupuy, à U.C.L.A.

Distinctions

— Docteur Honoris Causa de l'Université Heriot-Watt à Edimbourg. Juillet 1986.

— Elu Membre étranger de l'Académie Royale de Belgique, classe des Sciences et de l'Académie Américaine des Arts et Sciences.