Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Le cours a porté cette année sur la contrôlabilité exacte des systèmes distribuée.

Le problème est le suivant : on considère un système dont l'état, désigné par y, est solution d'une équation d'évolution du type

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ay = 0$$

où A est un opérateur (ou un système d'opérateurs) elliptique symétrique.

Les cas les plus importants sont

$$(2) \qquad A = -\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$$

auquel cas (1) est l'équation des ondes,

ou bien

(3) A = système de l'élasticité

ou bien

(4) $A = \Delta^2$, ce qui, en dimension d'espace 2 correspond à l'équation des plaques vibrantes.

On peut *agir* sur le système par la *frontière*.

Bornons nous ici au cas (1) (2) ; l'équation (1) est considérée pour x dans un ouvert Ω borné de R^n, de frontière Γ régulière, et pour $0 < t < T$.

L'action *(ou le contrôle)* sur le système (1) (2) s'exerce alors de l'une des manières suivantes :

$$(5) \qquad y = v \text{ sur } \Gamma \times (O,T)$$

ou

(6) $$\frac{\partial y}{\partial \nu} = v \text{ sur } \Gamma \times (O,T)$$

(ou d'autres conditions aux limites, par ex. un mélange de (5) et de (6)). Par ailleurs on se donne les *conditions initiales*

(7) $$y(x,o) = y^0(x), \ \frac{\partial y}{\partial t}(x,o) = y^1(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Le problème de la contrôlabilité exacte est alors le suivant : T *est donné* > 0. Pour y^0, y^1 *quelconques* dans un espace fonctionnel convenable, peut on trouver v (dans un espace fonctionnel convenable) tel que, si $y(x,t\,;\,v)$ est la solution du problème (1) (2) (5) ou (1) (2) (6), alors

(8) $$y(x,T\,;\,v) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,T\,;\,v) = O \quad \text{dans } \Omega.$$

Naturellement cet énoncé est *général.* On l'explicite ici pour l'équation des ondes pour limiter l'exposé.

On peut en outre ajouter des *conditions sur* v : par exemple

(9) v est à support dans $\Gamma_o \times (O,T)$, $\Gamma_o \subset \Gamma$.

On dit que l'on a *contrôlabilité exacte* lorsqu'il est possible de trouver v avec (8).

En fait il faut préciser ce problème :

(i) en précisant (9)

et, *surtout*

(ii) *en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels on travaille.*

Notons que, compte tenu de la vitesse finie de propagation des ondes (cela est spécifique — à peu près — aux cas hyperboliques), on ne peut avoir contrôlabilité exacte que pour T *assez grand.*

2. Nous avons introduit (J.L.L. [1] [2]) une *méthode générale* pour attaquer ce type de problème. Expliquons cela dans le cas *très particulier* (1) (2) (5).

On part de l'équation des ondes

(10) $$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\, \varphi = O \text{ dans } \ \Omega \times (O,T), \\[2ex] \varphi = O \text{ sur } \Gamma \times (O,T), \\[2ex] \varphi(x,o) = \varphi^0(x), \ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,o) = \varphi^1(x) \text{ dans } \Omega, \end{array} \right.$$

φ^0 et φ^1 étant données régulières (avec $\varphi^0 = O$ sur Γ).

On résout ensuite l'équation « rétrograde » ou « adjointe »

$$
(11) \quad \left| \begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta \, \Psi = O \quad \text{dans } \Omega \times (O,T), \\[2ex]
\Psi = \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} & \text{sur } \Gamma_o \times (O,T), \\[1ex] O & \text{sur } (\Gamma / \Gamma_o) \times (O,T), \end{array} \\[2ex]
\Psi \, (x,T) = \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} \, (x,T) = O \quad \text{dans } \Omega.
\end{array} \right.
$$

On définit aussi *un opérateur* Λ par

$$
(12) \qquad \Lambda \, \{\varphi^0, \ \varphi^1\} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \, (x,o), \ - \ \Psi(x,o) \right\}.
$$

Si l'on peut résoudre l'équation

$$
(13) \qquad \Lambda \, \{\varphi^0, \ \varphi^1\} = \{y^1, \ -y^0\}
$$

alors choisissant

$$
(14) \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \text{sur } \Gamma_o \times (O,T), \ O \text{ ailleurs,}
$$

on a

$$
y(x,t \; ; \; v) = \Psi \, (x,t)
$$

donc (8) a lieu.

Tout revient donc à étudier (13).

Or — on a fait ce qu'il fallait pour cela —

$$
(15) \qquad < \Lambda \, \{\varphi^0, \ \varphi^1\}, \ \{\varphi^0, \ \varphi^1\} > \; = \int_{\Gamma_o \times (O,T)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma \; dt.
$$

On note alors (c'est le point essentiel) que

$$
(16) \qquad \left(\int_{\Gamma_o \times (O,T)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma \; dt \right)^{1/2} = \| \{\varphi^0, \ \varphi^1\} \|_F
$$

définit une *norme* sur l'espace des données $\{\varphi^0, \ \varphi^1\}$.

On utilise ici (ou on démontre, selon les situations) un *théorème d'unicité :*

si $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \, \varphi = O$ dans $\Omega \times (O,T)$, avec $\varphi = O$ sur $\Gamma \times (O,T)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = O$ sur $\Gamma_o \times (O,T)$, alors *si* T *est assez grand*, on a $\varphi = O$: donc $\varphi^0 = \varphi^1 = O$.

On désigne par F l'espace de Hilbert complété par la norme (16). On voit alors que Λ est un isomorphisme de F sur F'. On a donc contrôlabilité exacte avec « T assez grand » et avec

(17) $\{y^1, y^0\} \in F'$.

Reste à préciser F (et F'). Cela dépend de Γ_o.

Si Γ_o est « convenable », alors

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

$H_0^1(\Omega)$ = espace de Sobolev usuel des fonctions à énergie finie et nulles au bord de Ω.

Si Γ_0 est « très petit », alors F est beaucoup plus grand, et F' beaucoup plus petit : cela est conforme au bon sens.

La structure exacte de F' pour Γ_0 « très petit » n'est pas encore complètement élucidée, mais devrait l'être très prochainement par les travaux de C. Bardos, G. Lebeau, E. Zuazua, entre autres.

Comme on l'a dit, cette méthode désignée par HUM (Hibert Uniqueness Method) est générale. Mais les espaces F doivent être étudiés cas par cas. Nous avons étudié l'équation des ondes pour différentes conditions aux limites et les équations d'ordre supérieur (cas (4)).

On peut noter que, parmi les différents contrôles v conduisant à (8), le contrôle v construit par HUM (formule (14)) est le contrôle *qui minimise*

(18) $\int_{\Gamma_o \times (o,T)} v^2 \, d\Gamma \, dt$.

On peut également définir le *problème dual* de (18).

On peut également étudier par cette méthode le cas de contrôles distribués dans Ω, ou s'exerçant en *un* point de Ω (ou *un* point de Γ).

3. Les cours ultérieurs étudieront :

(i) la stabilisation des systèmes
(à partir de la méthode précédente et par des méthodes directes)

(ii) le comportement de la contrôlabilité exacte lors de perturbations des systèmes (perturbations singulières, perturbations de domaines, homogénéisation).

PUBLICATIONS

J.L.L. [1] Contrôlabilité exacte des systèmes distribués. C.R.A.S., Paris 302 (1986), p. 471-475.

[2] Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. John Von Neumann lecture. SIAM National Meeting 1986.

[3] Exact controllability and singular perturbations. An example. Berkeley, June 1986.

[4] Contrôlabilité exacte et perturbations singulières (II). La méthode de dualité. Colloque ENS. 1986.

Publications liées au cours :

Notes aux C.R.A.S. de P. GRISVARD, V. KOMORNIK, E. ZUAZUA, publication en préparation de BARDOS et LEBEAU.

Un ensemble de Lecture Notes est en cours de préparation.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Conférences à l'Université de Perpignan, septembre 1986.

Conférences à l'Université de Moscou (septembre 1986), à l'Université d'Erevan (octobre 1986), à l'Université de Florence et à l'Academia Sinica (novembre 1986), aux Universités de Tokyo et de Kyoto (janvier 1987), à l'Université de Pavie (mars 1987), à l'Université de New York et à Georgetown University (mai 1987), à l'Université de Saint-Jacques-de-Compostelle (juillet 1987).

Conférence Plénière au Congrès IFAC, Munich, juillet 1987.

DISTINCTIONS

Membre de l'Académie Internationale d'Astronautique.