Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Soit un système d'évolution non dissipatif, dont l'équation s'écrit

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mathscr{A}y = O \text{ dans } \Omega \times (O,T), \ \Omega \text{ ouvert borné } \mathbb{R}^n, \ T > 0.$$

Dans (1) $\mathscr{A}$ est un opérateur elliptique. Si $\mathscr{A}$ est du 2^e ordre, l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathscr{A}$ est hyperbolique ; si $\mathscr{A}$ est d'ordre 2 m, m > 1, l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathscr{A}$ est du type Petrowsky.

Le « programme général » poursuivi dans les cours 86-87, 87-88 (et dans le cours de l'an prochain) est le suivant :

Partons de conditions initiales

$$(2) \quad y(x,O) = y^0(x), \ \frac{\partial y}{\partial t}(x,O) = y^1(x) \text{ dans } \Omega.$$

On cherche d'abord les *« actions minima »* sur le système qui permettent de *ramener le système à l'équilibre à l'instant* T *donné.* Si c'est possible, on dit qu'il y a *contrôlabilité exacte.* Naturellement il faut ajouter les *conditions aux limites,* « l'action » (le contrôle) pouvant intervenir sur les conditions aux limites.

Par exemple si

$$(3) \quad \mathscr{A} = -\Delta$$

on pourra agir sur *une partie du bord*

$$(4) \quad \begin{cases} y = v & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (O,T), \qquad \Gamma_0 \subset \Gamma = \partial\,\Omega, \\ y = 0 & \text{sur} \quad (\Gamma \backslash \Gamma_0) \times (O,T), \end{cases}$$

v étant dans (4) « à notre disposition ».

2. Dans le cours 86-87 on a introduit une méthode générale dite HUM (Hilbert Uniqueness Method) qui en outre permet de *préciser* l'énoncé du problème ci-dessus (en précisant les espaces fonctionnels dans lesquels on travaille).

Dans le cas particulier du problème ci-dessus avec (3) (4), HUM revient à considérer l'équation des ondes

$$(5)\quad \left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\, \varphi = O & \text{dans } \Omega \times (O,T) \\ \varphi\,(x,O) = \varphi^0\,(x),\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\,(x,O) = \varphi^1\,(x) & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = O \quad \text{sur} \quad \Sigma & \end{array} \right.$$

où φ^0 et φ^1 sont, par exemple, C^∞ à support compact dans Ω.

On introduit alors une *semi norme* sur les φ^0, φ^1 par

$$(6)\quad \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_F = \left(\int_{\Gamma_0 \times (O,T)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma\, dt\right)^{1/2}.$$

On vérifie que *si* T *est assez grand,* on obtient ainsi une *norme :* ceci est conséquence d'un théorème d'unicité du type Holmgren.

On introduit alors *l'espace de Hilbert* F complété pour la norme (6).

La théorie se déroule alors facilement. On obtient contrôlabilité exacte en prenant dans (4) $v \in L^2\,(\Gamma_0 \times (O, T))$ et si y^0, y^1 sont tels que $\{y^1, - y^0\} \in F'$ = espace dual de F, non identifié à F (ayant fait l'identification de $L^2\,(\Omega)$ à son dual).

Reste ensuite à caractériser F ou, au moins, obtenir des informations sur F aussi précises que possible.

Cela a été fait dans le cours 86/87 et, depuis a donné lieu à des travaux complémentaires de C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch. Le problème n'est pas encore totalement résolu si dans (6) Γ_0 est « très petit ».

Disposant d'une « méthode générale », la suite du programme est :

(i) de vérifier la *« robustesse »* de la théorie par rapport aux perturbations ;

(ii) d'étudier la *stabilisation des systèmes* (on a posé la question de faire tendre vers l'équilibre à l'instant T fini ; on peut poser la question de faire tendre le système exponentiellement vers l'équilibre) ;

(iii) de voir ce que « l'on peut faire de mieux » pour la contrôlabilité exacte ou la stabilisation dans le cas de systèmes non complètement identifiés ;

(iv) d'étudier l'approximation numérique de tout cela !

Le cours 87/88 a examiné le point (i) ci-dessus, les autres points devant faire l'objet de cours ultérieurs.

3. On a dans cet esprit examiné les cas suivants :

1) Perturbations d'opérateurs par ex. par des termes de mémoire (comme ceux apparaissant en élasticité avec mémoire longue ou courte).

Pour cela on a introduit une variante de HUM, la méthode RHUM (Reverse HUM). Cela correspond à l'irréversibilité des opérateurs considérés.

2) Perturbations singulières.

Par exemple, on a considéré l'opérateur

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon \Delta^2 - \Delta$$

et la « limite » lorsque $\varepsilon \to O$ de la contrôlabilité exacte.

3) Perturbations de domaines.

Par exemple, domaines minces d'épaisseur $\to$ O.

4) Opérateurs à coefficients très rapidements oscillants. Homogénéisation.

TRAVAUX LIÉS AU COURS

M. AVELLANEDA et C. LIN, N.Y.U., *Homogénéisation et Contrôlabilité exacte.*

C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH, *Appendice II du cours de 86/87,* Masson, 1988.

P. GRISVARD, *Contrôlabilité exacte dans le cas de domaines avec des coins.*

A. HARAUX, *Contrôlabilité interne et introduction, par HUM, de nouveaux espaces fonctionnels (qui ne sont pas des espaces de distributions).*

R. GLOWINSKI, C. LI, et J.L. LIONS, *Début du programme d'Analyse Numérique correspondant à HUM.*

A. EL JAI et M. RODRIGUEZ, *Calculs numériques pour contrôle ponctuel.*

E. ZUAZUA, a obtenu la contrôlabilité exacte en un temps T *arbitrairement petit* pour certains systèmes de Petrowsky (est-ce valable pour tous ?).

Par ailleurs ZUAZUA a introduit une *variante non linéaire de HUM* (C.R.A.S., 1987 ; exposé à Los Angeles, décembre 1987).

PUBLICATIONS

J.L. LIONS, *Contrôlabilité exacte et Stabilisation de Systèmes Distribués*. Vol. 1 : *Contrôlabilité exacte.* Vol. 2 : *Perturbations* (Masson, Paris, 1988).

Le volume 1, rédigé par E. ZUAZUA à partir de mon cours, contient deux appendices, par C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH d'une part, par E. ZUAZUA d'autre part.

J. LAGNESE et J.L. LIONS, *Modeling, analysis and control of Thin plates* (Masson, 1988).

E. ZUAZUA, Thèse (Paris, 1988).

Publications en cours des travaux mentionnés en 4.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Conférence à l'Académie des Sciences d'U.R.S.S., Moscou, septembre 1987.

Conférence à Bari, Italie, janvier 1988.

Conférences à Lausanne et série de conférences à Rutgers et Princeton, mars 1988.

Conférence à Rome, avril 1988.

Conférence au IIASA, juin 1988.

Conférence au colloque annuel d'Analyse Numérique. Diverses missions dans le cadre « Spatial », juin 1988.

DISTINCTIONS

Commandeur du Mérite National.

Docteur Honoris Causa de l'Université de Saint-Jacques de Compostelle.