

Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Considérons un système mécanique idéalisé, consistant en une plaque bidimensionnelle Ω_1 , toutes deux flexibles, et « liées » en A (cf. Fig. 1).

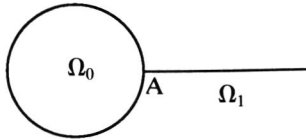


FIGURE 1

Les calculs des déplacements de ce système simple, sous l'action de forces données et d'impulsions initiales données, sont — curieusement — assez compliquées, toute la difficulté étant liée à « ce qui se passe » à la jonction A.

De telles structures multiples se rencontrent évidemment dans une foule de questions, avec des systèmes cette fois fort complexes : structures spatiales souples, robots souples, structures pétrolières en mer, etc.

Les calculs sont généralement faits en découpant les structures en « morceaux élémentaires » et les résultats sont « recollés » selon des procédés plus ou moins formels, et, lorsque c'est possible, des tests expérimentaux sont faits.

2. Du point de vue mathématique, la difficulté que l'on rencontre aussitôt est la suivante. Désignons *formellement* par u_0 (resp. u_1) une partie de l'état représentant le déplacement de Ω_0 (resp. Ω_1). Si u_0 (resp. u_1) satisfait à une équation elliptique du 2^e ordre dans Ω_0 (resp. Ω_1 ; c'est alors une simple équation différentielle ordinaire sur Ω_1), les inconnues u_0 et u_1 sont liées par des conditions en A, du type

$$(1) \quad u_0(A) = u_1(A).$$

Il y a alors une difficulté : si l'on essaye, par exemple, d'utiliser, sous une forme appropriée, un principe du type de celui de Dirichlet — correspondant à une minimisation de l'énergie — on doit considérer u_0 (resp. u_1) dans l'espace des fonctions à l'énergie finie. i.e. l'espace (appelé maintenant espace de Sobolev) des fonctions u_0 (resp. u_1) telles que

$$u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \in L^2(\Omega_0) \text{ (resp. } u_1, \frac{du_1}{dx_1} \in L^2(\Omega_1))$$

(en prenant Ω_1 pour axe des x_1). Or pour un tel espace fonctionnel $u_1(A)$ est parfaitement défini, en revanche $u_0(A)$ ne l'est pas et (1) *n'a pas de sens*.

Cette difficulté « disparaît » dans tout procédé d'approximation raisonnable par éléments finis. On peut alors écrire (1) sur les approximations et... on obtient ainsi des procédés qui ne sont pas convergents (d'où un bon nombre de résultats faux « établis » dans la littérature spécialisée).

3. Plusieurs voies sont suivies pour surmonter cette difficulté, aboutissant à plusieurs solutions qui dépendront, comme il est naturel, de la nature de la jonction en A .

Une première idée (E. SANCHEZ PALENCIA, exposée au Séminaire) est de sortir de l'espace d'énergie finie et d'introduire des développements asymptotiques ayant des termes singuliers au voisinage de A .

Une deuxième idée (Ph. CIARLET et ses élèves, exposée au Séminaire) est de considérer le système $\{\Omega_0, \Omega_1\}$ comme la limite d'un système tri-dimensionnel (3d). On approche Ω_0 par $\Omega_{0\varepsilon}$, Ω_1 par $\Omega_{1\varepsilon}$, $\Omega_{0\varepsilon}$ et $\Omega_{1\varepsilon}$ étant 3d (on ajoute une dimension à Ω_0 , 2 dimensions à Ω_1), cf. Fig. 2.

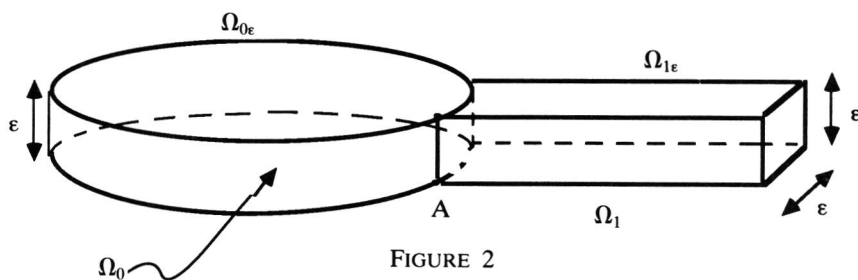


FIGURE 2

les ensembles $\Omega_{0\varepsilon}$ et $\Omega_{1\varepsilon}$ ayant une interface bidimensionnelle. La modélisation des déplacements (au moins des petits déplacements) pour cet ensemble est maintenant classique en théorie de l'élasticité. On cherche ensuite les développements asymptotiques de la solution en fonction de ε . Cela est développé dans les travaux de Ph. CIARLET.

Une troisième idée est de tenter — de façon « abstraite » — d'écrire aussi explicitement que possible *tous* les prolongements possibles des opérateurs elliptiques donnant lieu à des problèmes bien posés, i.e. de considérer *toutes* les conditions aux limites possibles — dans la ligne de travaux, déjà assez anciens, de I.M. VISIK et S.L. SOBOLEV d'une part et de E. MAGENES et de l'A.

4. Le cours a étudié quelques exemples, en insistant sur les développements asymptotiques du *spectre* des opérateurs elliptiques dans l'ensemble $\{\Omega_0, \Omega_1\}$. Les cas de résonance conduisent à des développements asymptotiques inhabituels.

On a par ailleurs étudié — cas relevant de techniques analogues — les problèmes d'interface dans d'autres systèmes (du type systèmes couplés Océan/atmosphère) où les singularités ne sont plus liées au changement de la dimension mais à de fortes discontinuités dans les constantes physiques.

J.-L. L.

CONFÉRENCES

Novembre 1988 : I.C.T.P. (International Centre of Theoretical Physics, Trieste).

Novembre 1988 : Conférence à l'Unesco, « Les Mathématiques du Global Change ».

Décembre 1988 : Institut Stekloff à Moscou.

16-20 janvier 1989 : Conférences à Colorado Spring (hypersonique et avion spatial) et au M.I.T.

16 mars 1989 : Conférence à Pavie.

10-16 avril 1989 : Conférences à Bloomington et à Penn. State Univ.

3-5 mai 1989 : Conférences à l'Institut de Calcul du C.N.R., Rome.

17 mai 1989 : Conférence au Colloque S.I.A.M. à San Francisco.

23 juin 1989 : Conférence à Saint-Jacques-de-Compostelle à l'occasion de la remise du diplôme de Docteur *Honoris Causa* de cette Université.

26 juin 1989 : Conférence au Colloque sur le contrôle à Perpignan.

5 juillet 1989 : Conférence à Venise - Unesco.

Septembre 1989 : Conférence à l'Université de Malaga.

DISTINCTION

Docteur *Honoris Causa* de l'Ecole Polytechnique de Lausanne.