

## Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut  
(Académie des Sciences), professeur

Le cours a été divisé en deux parties, la première partie faite à Paris, la deuxième dans le cadre de la Maison Descartes à Amsterdam.

### PREMIÈRE PARTIE

Les modélisations mathématiques, plus ou moins « globales », qu'obtiennent les spécialistes de l'atmosphère, de l'océan, conduisent à un certain nombre de problèmes mathématiques et numériques qui sont nouveaux.

Les modèles consistent en les équations fondamentales de la mécanique des fluides, compressibles ou non et, pour les calottes glaciaires, en des équations d'évolution de l'élasto plasticité. Ces différents modèles (et leurs diverses approximations) sont couplés par des conditions de transmission aux interfaces (et notamment l'interface océan/atmosphère mais aussi l'interface atmosphère/végétation). Ils sont également couplés par des opérateurs dits de « feedback » correspondant, en tout premier lieu, aux actions des nuages.

On obtient ainsi des (grands) systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires d'évolution, dissipatifs.

La validation de ces systèmes fait l'objet de nombreux travaux de caractère surtout physique et numérique.

Dans pratiquement tous les cas, on a affaire à *des systèmes à données incomplètes*. Les données initiales sont incomplètement connues, ou entachées d'erreurs de mesure. Il en est de même pour les conditions aux limites. Que peut-on néanmoins calculer ? Et comment tenir compte (« assimiler ») des

données qui sont fournies au fur et à mesure de l'évolution du calcul effectué sur le modèle ?

On a introduit dans ce but dans le cours 88/89, et on a complété cette année, la notion de sentinelle, sorte de moyenne généralisée, moins agréable et moins simple qu'une moyenne usuelle *mais* insensible (au 1<sup>er</sup> ordre) aux variations dans des données initiales (ou les conditions aux limites). Cela sera poursuivi dans les cours des années à venir.

On a entamé cette année l'étude d'une autre question, celle du *contrôle* de systèmes à données incomplètes. On a à ce sujet introduit la notion de *contrôle insensible*.

Considérons par exemple un système dont l'équation d'état est

$$(1) \quad \frac{\partial y}{\partial t} + A(y) = v \chi_{\mathcal{O}} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T)$$

où  $A$  est un opérateur elliptique non linéaire et où le contrôle  $v$  est exercé sur un ensemble  $\mathcal{O} \subset \Omega$  ( $\chi_{\mathcal{O}}$  = fonction caractéristique de  $\mathcal{O}$ ). On ajoute à (1) des conditions aux limites sur  $y$  (supposées connues sans ambiguïté) et des conditions initiales connues seulement à de « petites » variations près. Alors l'état du système est fonction de la variable d'espace  $x$ , de la variable de temps  $t$ , du contrôle  $v$ , et des « variations » dans les données initiales :

$$y = y(x, t; v, \text{« variations »}) = y(v, \text{« variations »})$$

Soit par ailleurs  $y \rightarrow \varphi(y)$  une fonction de l'état à valeurs  $\geq 0$ . On dira que le contrôle  $v$  est *insensible par rapport à*  $\varphi$  si la fonction

$$\varphi(y(v, \text{« variations »}))$$

est *insensible*, au premier ordre, aux variations dans les données initiales.

L'existence de tels contrôles a été établie pour de nombreuses situations *linéaires*. Pour les problèmes non linéaires, seuls des résultats partiels sont pour l'instant connus.

## DEUXIÈME PARTIE

La deuxième partie du cours a eu lieu à Amsterdam. Les quatre cours ont porté sur des sujets voisins de ceux évoqués ci-dessus, mais reprenant aussi des cours des deux années précédentes. (cf. point 6 ci-après).

J.-L. L.

## MISSIONS

Durant la deuxième semaine de Janvier 1990 on a donné une série de 5 cours à l'Institut d'Espagne et 3 séminaires aux Universités Autonome, Computense et Polytechnique de Madrid.

Les sujets étaient voisins de ceux du cours, avec les différences suivantes :

Ce cours (en Français) de l'Institut d'Espagne étant destiné à un public non spécialisé, on a fait une présentation non technique de l'ensemble de la modélisation du « Système de la Planète Terre » et des différents problèmes mathématiques et numériques que cela pose. Ce cours sera *publié par l'Instituto d'España, 1990*, dans une traduction en espagnol.

Les séminaires ont porté sur la contrôlabilité exacte, les sentinelles et l'Analyse numérique de ces questions (travaux en collaboration avec R. Glowinski).

## AUTRES MISSIONS

Des conférences ont été données dans les cadres suivants :

Octobre 1989 : Symposium sur les Mathématiques appliquées et industrielles — Venise — Puis au colloque de Pavie.

Octobre 1989 : Académie des Sciences d'Israël (dans le cadre des échanges entre cette Académie et l'Académie des Sciences de Paris) et conférences aux Universités de Jérusalem et de Tel Aviv.

Novembre 1989 : Colloque organisé par la Météorologie Nationale à Toulouse.

Mars 1990 : Cornell University.

Mai 1990 : Rutgers University et Venise.

Juin 1990 : Jérusalem.

Juillet 1990 : Clermont Ferrand (Météorologie).

## TRAVAUX LIÉS AU COURS

Contrôlabilité exacte : E. Zuazua (Madrid).

Deux chercheurs chinois (Yau Jinhai et Huang Ying).

Calculs en cours avec R. Glowinski et travaux de J.P. Kernevez (Compiègne), J. Blum (Grenoble).

Sentinelles : G. Geymonat et E. Tesei (Paris et Rome).

*Missions* variées dans le cadre « spatial » : Saint-Jean-de-Luz, Cap d'Agde, Rome, Bonn, Kourou...

#### PUBLICATIONS

Cours de l'Institut d'Espagne.

Actes des Colloques.

Publications du séminaire, avec H. Brezis ; Sec. scientifique : D. Cioranescu (D. de Recherches au C.N.R.S.). Les 10 premiers volumes sont parus.

#### CONFÉRENCES A LA MAISON DESCARTES, AMSTERDAM

On a donné, dans le cadre de la Maison Descartes, au C.W.I. (Centre de Recherche en Mathématique et Informatique, Amsterdam), une série de 4 cours \* dans le séminaire du 22 au 26 janvier 1990. L'exposé a porté sur un certain nombre de problèmes mathématiques posés par l'étude du climat : assimilation des données, décomposition de l'état en composantes lentes et rapides (variétés lentes ou variétés inertielles), irréversibilité des changements physiques et contrôlabilité exacte, introduction aux sentinelles. L'auditoire (une cinquantaine de personnes) était issu du C.W.I., des diverses universités hollandaises et de l'E.S.T.E.C. (European Space Research and Technology Center), situé à Noordwijk. L'aide courtoise et efficace du Directeur de la Maison Descartes, M. Lalanne, a été vivement appréciée.

---

\* En Français ; l'auditoire, interrogé, a plébiscité notre langue (face à l'anglais).