Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. - NOTION DE CONTRÔLE INSENSIBILISANT

On considère un système dont l'état, désigné par $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ est gouverné par un ensemble d'équations aux dérivées partielles. On suppose en outre que l'on peut agir sur le système, par l'intermédiaire d'un contrôle $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Plus précisément, soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ le domaine géométrique où y est défini et soit $\omega \subset \Omega$ le domaine (généralement « petit ») sur lequel on peut appliquer le contrôle v.

L'ensemble des équations d'état s'écrit, symboliquement,

$$(1) \qquad \frac{\partial y}{\partial t} + Ay + f(y) = v\,\chi_\omega \text{ dans } \Omega \times (O,T)$$

où χ_ω = fonction caractéristique de ω,

A = système d'opérateurs aux dérivées partielles du 2^e ordre,

A étant elliptique,

f = fonction non linéaire de y (et également des dérivées spatiales du 1^{er} ordre de y).

On ajoute à (1) des conditions aux limites. Pour fixer les idées

$$(2) \qquad y = 0 \text{ sur } \partial\,\Omega \times (O,T)$$

(mais tout est encore valable pour d'autres types de conditions aux limites, ainsi d'ailleurs que pour des systèmes A d'ordre supérieur à 2, auquel cas il faut introduire des conditions aux limites supplémentaires).

On doit ajouter à (1) (2) des *conditions initiales*. On suppose que les conditions initiales sont *imparfaitement connues* (situation habituelle, par exemple, dans les problèmes de météorologie ou d'océanographie). Plus précisément on suppose que

(3) $y \mid_{t=0} - y^0 \in$ boule de centre l'origine et de rayon τ,

τ « petit », la « boule » étant prise dans une norme convenable.

On se donne par ailleurs une fonctionnelle

(4) $y \rightarrow \Phi(y)$, espace des états $\rightarrow$ nombres réels $\geqslant 0$.

Par exemple si (1) est le système de Navier-Stokes (que l'on peut écrire sous une forme de type (1)), on pourra prendre

(5) $$\Phi(y) = \iint_{\Omega \times (O,T)} |\operatorname{rot} y|^2 \, dx \, dt.$$

Les problèmes généraux qui ont été abordés dans le cours sont les suivants :

(i) peut-on trouver des contrôles v (à support dans $\varpi \times (O,T)$ d'après la formulation (1)) tels que

(6) $$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(y) \mid_{\tau=0} = 0 \ ? \qquad \square$$

Remarque. Cet énoncé du problème (i) *suppose* que (1) (2) et $y_{t=0}$ = donné admet une solution unique, ce qui est un problème toujours ouvert, depuis J. Leray (1934), pour le système de Navier Stokes, si $n = 3$ (mais est démontré si, toujours pour Navier Stokes, $n = 2$). $\square$

(ii) *Si* (6) *est impossible* (tel est déjà le cas pour les problèmes linéaires, si y^0 ne satisfait pas à des conditions convenables), peut-on trouver des v tels que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(y) \mid_{\tau=0} \text{ soit « petit » ?}$$

(iii) Si l'on peut trouver des v tels que l'on ait (i) ou (ii) *on dit alors que le contrôle* v *est insensibilisant pour la fonctionnelle* Φ. Y a-t-il « beaucoup » de tels contrôles v, (« beaucoup » étant pris dans un sens convenable) ?

2. - Naturellement, admettant les questions ci-dessus résolues, l'étape suivante est de résoudre *un problème de contrôle habituel :* trouver v minimisant une fonction coût $\mathcal{J}(y)$, de manière à s'approcher au mieux d'un état « optimal » souhaité — *en restreignant la classe des contrôles admissibles* v *à ceux qui sont insensibilisants pour la fonctionnelle* Φ.

Cette deuxième famille de problèmes ne pose pas de problèmes techniques essentiellement nouveaux, *si* les problèmes (i) (ii) (iii) sont résolus.

3. - Les problèmes (i) (ii) (iii) ont fait l'objet d'une étude assez systématique dans le cas des systèmes *linéaires* (ou obtenus par linéarisation de (1)).

On a ramené l'étude de ces problèmes à diverses questions *d'unicité* pour les équations paraboliques (théorème de Mizohata) ou pour les équations hyperboliques (théorème de Holmgren). On arrive aussi à montrer que la question (i) admet une réponse positive si et seulement si y^0 est dans un espace assez « petit » (au moins dans les cas paraboliques). La réponse aux questions (ii) (iii) est assez généralement positive, lorsque l'on peut disposer d'un théorème d'unicité convenable.

4. - On a aussi examiné quelques variantes.

4.1. - Tout d'abord on peut disposer d'informations plus précises que (3).

Cela diminue les contraintes sur le choix de y^0 pour la question (i).

4.2. - On peut supposer que v est assujetti à des contraintes. Par exemple *certaines* des composantes de v peuvent être nulles. Cela *complique* les questions et conduit à de nouvelles questions d'unicité, dont certaines ont été résolues et d'autres font l'objet de travaux en cours.

4.3. - On peut enfin considérer des systèmes de type « mêlé », à la fois hyperbolique et parabolique, tel par exemple le système de la thermo-élasticité.

J.-L. L.

Missions, conférences

Conférence Université de Malaga (Espagne), octobre 1990.

Missions à Moscou (janvier 1991), Venise (mars 1991), Washington (mai 1991).

Conférences à Edinburgh (juin 1991), à Bath (début juillet 1991), série de conférences au cours de l'Escurial (fin août 1991) (cours sur les méthodes mathématiques en Climatologie).

Distinctions

Prix du Japon (en Mathématiques Appliquées). Japan Prize Lectures (Tokyo et Kyoto), semaine du 25 avril 1991.

Prix Harvey du Technion de Haïfa (18 juin 1991).

Membre de l'Académie Pontificale des Sciences (octobre 1990).

Membre Etranger de l'Académie des Sciences d'Ukraine (avril 1991).