Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. SENTINELLES

Les sentinelles sont des fonctionnelles qui permettent, en principe, et sous certaines conditions, de déceler des « *pollutions* » (mathématiquement : des perturbations exercées sur le système) dans des *systèmes distribués* (i.e. modélisés par des équations aux dérivées partielles) dont *certains éléments sont hors d'atteinte*.

2. La *structure générale* de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne l'état du système étudié est supposée connue, soit, formellement

(1) $$\frac{\partial y}{\partial t} + A(y) = \text{source dans l'ouvert } \Omega \times]0,T[.$$

Pour que l'état puisse être défini, il faut donc connaître :

(2) les coefficients de l'opérateur A et la structure des non linéarités éventuelles,

(3) les termes sources qui apparaissent au 2^e membre de (1),

(4) les conditions initiales,

(5) les conditions aux limites

et

(6) l'ouvert Ω.

Le système est dit *à données incomplètes* si *l'une* au *moins des informations* (2)...(6) *n'est que partiellement connue.* □

3. Termes manquants et termes de pollution

Considérons la situation suivante. On suppose que y est un scalaire et que l'opérateur A est elliptique du 2[e] ordre. On suppose que l'équation (1) s'écrit

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(y) = \xi + \lambda\hat{\xi} \tag{7}$$

où ξ est donné dans un espace fonctionnel convenable, disons Y, *et où* $\lambda\hat{\xi}$ *n'est pas connu*. On suppose seulement (pour commencer) que

(8) $\hat{\xi}$ demeure dans la boule unité de Y,
λ est « petit » dans $\mathbb{R}$.

On suppose que les coefficients de A et que l'ouvert Ω sont connus mais que les *données initiales sont incomplètes*. Si l'on désigne par $y(0)$ la fonction $x \rightarrow y(x, t = 0)$, la condition initiale s'exprime sous la forme

$$y(0) = y^{\circ} + \tau\hat{y}^{\circ} \tag{9}$$

où y° est donné et où

(10) $\hat{y}^{\circ}$ demeure dans la boule unité d'un espace de
Hilbert ou de Banach convenable et avec τ « petit ».

On suppose par ailleurs (pour l'instant) que les conditions aux limites sont connues, par exemple

(11) $y = 0$ pour $x \in \partial\Omega$ = frontière de Ω
et pour $t \in (0, T)$.

Le cours a eu pour objet, pour l'exemple précédent, puis pour des familles d'autres exemples, de donner des méthodes permettant d'*obtenir des informations sur* $\lambda\hat{\xi}$ *qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale autour de* y°.

On établit ainsi une distinction entre le terme $\lambda\hat{\xi}$ qui est dit « *de pollution* » et le terme $\tau\hat{y}^{\circ}$ qui est dit « *manquant* » et que l'on *ne cherche pas* à identifier. □

Naturellement, on peut « commuter » la situation, en supposant que

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(y) = \xi + \tau\hat{\xi}, \tag{12}$$

$$y(0) = y^{\circ} + \lambda\hat{y}^{\circ}, \tag{13}$$

(11) étant inchangé. On cherche alors à obtenir des informations sur la donnée initiale λy° (dite « *de pollution* »), qui soit, si c'est possible, « indépendante » des variations de la source autour de ξ. □

Naturellement, pour espérer pouvoir obtenir quelques informations, il faut « *observer y* ».

4. Observation du système

On « observe » l'état sur un *observatoire* $\mathcal{O}$, *et pendant un temps* (t_o, t_1), $0 \leq t_o < t_1 \leq T$.

L'observatoire $\mathcal{O}$ peut être soit *distribué* :

(14) $\quad \mathcal{O} \subset \Omega$

soit un *observatoire frontière*

(15) $\quad \mathcal{O} \subset \Gamma = \partial\Omega.$

On peut aussi considérer des *observatoires dépendant du temps*

(16) $\quad \mathcal{O} = \mathcal{O}(t),\ t \in (t_o, t_1).$

On suppose que le problème (7), (9), (11) admet une solution unique, que l'on note $y(x, t\ ;\ \lambda\hat{\xi}, \tau\hat{y}^o)$ où $\lambda\hat{\xi}$ et $\tau\hat{y}^o$ ne sont pas connus.

Si, pour fixer les idées, on se place dans le cas (14), avec $t_o = 0$, et $t_1 = T$, *on suppose l'état observé sur* $\mathcal{O} \times (0, T)$, et on a donc

(17) $\quad y(x, t\ ;\ \lambda\hat{\xi}, \tau\hat{y}^o) = m_o(x, t)$ sur $\mathcal{O} \times (0, T)$

où m_o est connue. □

Naturellement, il y a en fait un « *bruit* » dans l'observation m_o, et on a donc plutôt

(18) $\quad y(x, t\ ;\ \lambda\hat{\xi}, \breve{\iota}\hat{y}^o) = m_o(x, t) + \beta k(x, t)$

où $k(x, t) = k \in$ espace K, k demeurant dans la boule unité de K et où β est petit. □

Le problème est maintenant :

(19) peut-on obtenir, à partir de la donnée de m_o, des informations sur $\lambda\hat{\xi}$ qui soient indépendantes des variations de $y(0)$ autour de y^o ?

et, dans le cas où il y a un bruit βk dans l'observation :

(20) peut-on obtenir des informations sur $\lambda\hat{\xi}$ qui soient indépendantes des variations de $y(0)$ autour de y^o et qui ne soient pas affectées par le bruit βk ?

Les sentinelles tentent de donner des éléments de réponse à ces questions. Avant d'en donner ici une première définition, indiquons quelques *exemples* *de situations* où l'on rencontre effectivement des problèmes du type précédent. □

5. Exemples

Dans presque tous les problèmes de météorologie, ou d'océanographie, les conditions initiales ne sont pas complètement connues. (Noter d'ailleurs que l'on a une grande variété de possibilités quant au choix de l'instant initial).

Même chose pour des problèmes de pollution dans un lac, une rivière, un estuaire, etc. □

Les *conditions aux limites* peuvent aussi être inconnues, ou seulement partiellement connues, sur une partie de la frontière, qui peut, par exemple, être inaccessible aux mesures, qu'il s'agisse de situations bio-médicales ou de situations correspondant à des accidents. Il en va de même pour les *termes sources* qui peuvent être d'accès difficile. □

Lorsque la structure de Ω n'est pas entièrement connue, ou d'accès difficile (ou impossible), les coefficients de l'opérateur A peuvent aussi être imparfaitement connus. Une partie de la frontière de Ω peut aussi être imparfaitement connue, comme par exemple, dans la gestion de puits de pétrole. □

6. Moindres carrés

Naturellement les problèmes évoqués brièvement au n° 4 sont classiques et ont donné lieu à beaucoup de développements.

L'idée la plus habituelle est celle des *moindres carrés*. Dans le contexte du point 3 ci-dessus, cela revient à considérer les inconnues $\{\lambda, \hat{\xi}, \tau\hat{y}^0\} = \{v, w\}$ comme des *variables de contrôle*. L'état est $y(x, t\,; v, w)$. On veut que cet état soit « aussi proche que possible » de m_0. On considère donc la *distance*

$$J(v, w) = \text{distance de } y(x, t\,;\, v, w) \text{ sur } \mathcal{O} \times (0, T) \text{ à } m_0 \tag{21}$$

(la distance étant prise dans une norme convenable) et l'on cherche

$$\inf . J(v, w), \tag{22}$$

où v, w sont quelconques ou assujettis à des contraintes qui correspondent aux informations dont on dispose.

Du point de vue technique, cela conduit à des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes distribués.

Naturellement, la formulation précédente est complètement générale, et s'applique, en principe, à toutes les situations évoquées ci-dessus.

Entrent dans ce cadre les problèmes dits « *d'identification* » et les méthodes dites « *inverses* ».

Dans ce type de méthode, les termes de pollution et les termes manquants *jouent le même rôle*. On cherche à déterminer les uns et les autres. Il y a possibilité de ne pas pouvoir nettement séparer les rôles des uns et des autres. Pour les problèmes non linéaires, il *n'y a pas unicité* de la solution, sauf si l'on démarre les itérations (correspondant à la résolution numérique) autour de la solution correspondant à $\lambda = 0$ et $\tau = 0$. Les problèmes correspondants peuvent être mal posés. Il faut alors introduire dans (22) des termes régularisants ou stabilisateurs qui induisent des erreurs d'approximation supplémentaires.

Sans bien sûr, en aucune façon, négliger cette méthode fondamentale et qui demeure de loin la plus importante pour ce type de problèmes, il peut donc être utile de tenter « autre chose ». □

7. Sentinelles

Pour fixer les idées, considérons l'observatoire $\mathcal{O}$ distribué, $\mathcal{O} \subset \Omega$. Soit $y(x, t\,;\ \lambda, \tau) = y(\lambda, \tau)$ l'état correspondant à une pollution $\lambda\hat{\xi}$ et à un terme manquant $\tau\hat{y}^0$. On écrit cela formellement $y(\lambda, \tau)$ pour simplifier l'écriture. Les $\lambda\hat{\xi}$ et $\tau\hat{y}^0$ correspondant à la situation réelle satisfont à

(23) $\quad y(\lambda, \tau) = m_0$ sur $\mathcal{O} \times (0, T)$

[on considère pour le moment le cas où il n'y a pas de bruit additif dans l'observation sur $\mathcal{O} \times (0, T)$].

Une idée standard est de prendre une valeur moyenne, pour savoir si « quelque chose se passe ». Soit donc h_0 une fonction donnée sur $\mathcal{O} \times (0, T)$, telle que

(24) $\quad \iint_{\mathcal{O}\times(0,\,T)} h_0(x,\ t)dxdt = 1.$

On considère alors

(25) $\quad M(\lambda, \tau) = \iint_{\mathcal{O}\times(0,\,T)} h_0 y(\lambda, \tau)dxdt.$

On cherche à déterminer le terme de pollution (en λ), *indépendamment* du (ou des) terme(s) en τ. Mais il n'y a en général aucune raison pour que, *au premier ordre*, $M(\lambda, \tau)$ soit indépendante de τ.

Autrement dit, il n'y a aucune raison pour que

(26) $\quad \dfrac{\partial M}{\partial \tau}(0,0) = 0.$

On introduit alors un terme supplémentaire dans (25), et on pose

(27) $S(\lambda, \tau) = \iint_{\mathcal{O}\times(0,\, T)} (h_0 + w) y(\lambda, \tau) dxdt$

où $w = w(x, t)$ est *une fonction à déterminer* de la manière suivante :

(28) $\dfrac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0$

et

(29) $\|w\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,\, T))} = \text{minimum}.$

La condition (28) exprime l'insensibilité (désirée) de la fonctionelle par rapport à τ (au premier ordre près) et la condition (29) exprime que l'on s'éloigne le « moins possible » de la moyenne.

Remarque 1

Il y a un écueil évident : $w = -h_0$ donne lieu à (28). Par conséquent, sous des hypothèses très générales, le problème *admet une solution unique. Mais* il faudra s'assurer que sous des conditions convenables, la solution *n'est pas* $w = -h_0$, la fonctionnelle $S(\lambda, \tau) \equiv 0$ n'étant pas susceptible de nous apporter beaucoup d'informations... □

La fonctionnelle, supposée non nulle, définie par (6.6), (6.7) est dite une *sentinelle*, plus précisément *la sentinelle définie par* h_0. □

Remarque 2

L'énoncé (28) du problème suppose *l'existence* de la dérivée $\dfrac{\partial S}{\partial \tau}(0,0)$, donc de la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial \tau} y$ pour $\lambda = 0$, $\tau = 0$. Il faudra vérifier cela dans chaque cas particulier. Et cette hypothèse peut ne pas être vérifiée. Ainsi, elle ne sera pas vérifiée dans la plupart des problèmes à *frontière libre*.

Remarque 3

Dans la formulation (18), (19), les hypothèses (24) ne sont plus nécessaires. On peut attacher une sentinelle et une seule à *tout* élément h_0 donné dans $L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$.

Sous réserve, bien sûr que cette sentinelle ne soit pas identiquement nulle et soit donc susceptible de donner des informations sur la pollution. *Mais quelles informations ?*

8. Informations fournies par les sentinelles

Si l'on suppose que l'état $y(\lambda, \tau)$ dépend différentiablement de λ et de τ, on peut écrire, formellement

(30) $$S(\lambda, \tau) \simeq S(0, 0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0)$$

(puisque, par définition, $\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0$). Utilisant (23) on peut donc écrire

(31) $$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) \simeq \iint_{\mathcal{O}\times(0,\ T)} (h_o + w)(m_o - y_o)dxdt$$

où y_o *est l'état calculé* pour $h = 0$, $\tau = 0$.

On a égalité dans (31) (et non seulement égalité approximative) pour les systèmes *linéaires*. □

Par conséquent, on a une estimation de la quantité

(32) $$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \iint_{\mathcal{O}\times(0,\ T)} (h_o + w)y^\lambda dxdt$$

où y^λ désigne la dérivée en λ de l'état pour $\lambda = 0$, $\tau = 0$.

Cette dérivée y^λ ne dépend plus que de quantités connues *et de* $\hat{\xi}$. Par conséquent l'*estimation* (31) *de* $\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0)$ *contient des informations sur* $\lambda\hat{\xi}$.

En fait, en introduisant l'état adjoint ou, si l'on préfère, un multiplicateur de LAGRANGE, (32) est donné par une forme linéaire sur $\lambda\hat{\xi}$:

(33) $$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0, 0) = < \mathcal{L}, \lambda\hat{\xi} >.$$

En fait $\mathcal{L}$ est définie (de façon unique) pour chaque h_o on écrit donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}(h_o)$. Finalement, *on a l'estimation*

(34) $$< \mathcal{L}(h_o), \lambda\hat{\xi} > \simeq \iint_{\mathcal{O}\times(0,\ T)} (h_o + w)(m_o - y_o)dxdt,$$

qui est une égalité dans le cas linéaire. □

Telle est l'information fournie par *une* sentinelle.

Une pollution $\lambda\hat{\xi}$ est par conséquent *non détectable* (on dira : *furtive* pour *la* sentinelle définie par h_o) si

(35) $$< \mathcal{L}(h_o), \lambda\hat{\xi} > = 0. \quad \square$$

Remarque 1

On insiste bien sur le fait que l'observatoire $\mathcal{O}$ est *choisi une fois pour toutes*.

La « taille » de cet observatoire, et la longueur T du temps d'observation, qui sont nécessaires pour que

(36) $\quad \mathcal{L}(h_o) \not\equiv 0$

peut dépendre des situations et de la nature de l'opérateur d'évolution

$\frac{\partial}{\partial t} + A$. Pour les opérateurs *paraboliques*, ou à *vitesse infinie* de propagation

des singularités, on peut prendre $\mathcal{O}$ et T *arbitrairement « petits »*. La situation est différente dans les cas hyperboliques, où il faut alors prendre $\mathcal{O}$ et T « assez grands ». □

La notion de furtivité (35) conduit au problème général suivant, dit « *de la furtivité* ». On considère une suite infinie

(37) $\quad h_{01}\ h_{02},\ldots$ *complète* dans L^2 $(\mathcal{O} \times (0, T))$

et on construit *les sentinelles correspondantes*.

Les sentinelles sont toutes placées sur $\mathcal{O}$ qui est fixé. On a alors des estimations des quantités

$$< \mathcal{L}\,(h_{oj}), \lambda\hat{\xi} >.$$

On a montré dans le cours que *pour les systèmes de type parabolique*, et sous certaines conditions, il n'existe aucune pollution furtive pour toutes les sentinelles définies par h_{01}, h_{02}, ... Autrement dit

$$< \mathcal{L}\,(h_{oj}), \lambda\hat{\xi} > = 0 \text{ pour } j = 1, 2, \ldots$$

implique

$$\lambda\hat{\xi} = 0.$$

On peut alors dire que la suite correspondante de sentinelles est *complète*.

La situation est différente pour les systèmes hyperboliques, *à vitesse finie* de propagation des singularités. On a alors *toujours* des pollutions furtives pour *toutes* les sentinelles construites sur *un* observatoire $\mathcal{O}$, *mais de structure très particulière*. En gros, on peut dire qu'il y a des pollutions furtives dans un intervalle de temps $(0, t_0)$ au début, puis un intervalle de temps final (t_1, T) mais pas dans l'intervalle (t_0, t_1).

9. Le cours a présenté les situations principales.

J.-L. L.

PUBLICATIONS

La rédaction détaillée du cours a paru, sous le titre *Sentinelles* pour les systèmes distribués à données incomplètes, dans la collection RMA, Vol. 21, Masson, 1992.

Les autres publications correspondent aux exposés faits dans les différents colloques ou conférences.

MISSIONS

Novembre 1991 : Mission à Moscou et à Kiev.

Début décembre 1991 : Conférences au Technion, Haifa (conférences du Prix Harvey).

30 mars-3 avril 1992 : Conférences Marker, Pennstate University.

10 avril 1992 : Conférence à Sophia Antipolis (Colloque J. CEA).

30 avril 1992 : Conférence à Pavie et Conférence Léonard de Vinci à l'Université de Milan.

4-7 mai 1992 : Réunion du comité Exécutif de l'UMI à Rio de Janeiro, Conférence à l'IMPA.

18-20 mai 1992 : Conférence au Colloque organisé à l'Université de Houston.

25 mai 1992 : Conférence à Bâle au Congrès Mondial sur les méthodes de calcul en Dynamique des fluides.

10 juin 1992 : Conférence à l'ENS dans le cadre du Colloque France/Israël en Mathématiques.

29 juin-3 juillet 1992 : Conférences au cours d'Almeria (dans le cadre de l'Université Complutense de Madrid) sur l'environnement, l'économie et les modèles mathématiques.

DISTINCTION

D. Honoris Causa, University de Houston, mai 1992.