

Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

On étudie des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, avec possibilité de contrôle, désigné par v et contenant des perturbations inconnues ou partiellement connues, notées g .

L'état du système est alors

$$y(x, t; v, g)$$

fonction (ou vecteur) dépendant des variables d'espace x , de la variable de temps t , et de v et g .

Dans le cas habituel de la théorie du contrôle *déterministe*, il n'y a pas à introduire g . On a alors un état $y(x, t; v)$, auquel on associe un critère, *ou fonction coût*

$$(1) \quad J(v) = \varphi(y(\cdot; v), v)$$

où φ est fonction de y et de v . L'étape suivante est de chercher

$$(2) \quad \inf_v J(v),$$

v étant assujéti à des contraintes convenables.

En présence des perturbations, notées g , l'analogue de (1) est maintenant fonction de v et de g :

$$(3) \quad J(v, g) = \varphi(y(\cdot; v, g), v).$$

Le contrôle optimal correspondant à la pire des situations serait donné alors par

$$(4) \quad \inf_v \sup_g J(v, g).$$

Mais très généralement $\sup_g J(v, g) = +\infty$ quel que soit v , et (4) n'a aucun intérêt. \square

Vers le début des années 50, des chercheurs en théorie des jeux ont introduit la fonction dite « de regret »

$$(5) \quad R(v, g) = J(v, g) - \inf_v J(v, g).$$

On cherche ensuite

$$(6) \quad \inf_v \sup_g R(v, g),$$

ce qui ne semble pas avoir conduit à des notions utilisables. \square

Une autre possibilité est de remplacer (4) par

$$(7) \quad \inf_v \sup_g [J(v, g) - \gamma \|g\|^2]$$

dans le cas où

- (i) l'équation d'état est linéaire.
- (ii) le critère est quadratique.

Le problème (7) donne alors un résultat non dégénéré si γ est assez grand. Cela est lié à la notion de contrôle « robuste ». \square

Nous avons introduit dans le cours la variante suivante.

On suppose que le choix « $v = 0$ » correspond à la situation où *aucun contrôle n'est exercé* (on ne fait rien), et on se borne aux contrôles qui, au moins, ne sauraient aggraver la situation où l'on ne fait rien. Autrement dit

$$(8) \quad J(v, g) \leq J(0, g) \quad \forall g.$$

On cherche alors (comparer à (4))

$$(9) \quad \inf_v \sup_g (J(v, g) - J(0, g))$$

la solution de (9) étant dite le *contrôle sans regrets*.

Il peut arriver que l'ensemble des v vérifiant (8) soit « trop petit ». On peut même construire des cas où seul « $v = 0$ » satisfait à (8). On relaxe alors le problème (9) de la façon suivante (comparer à (7))

$$(10) \quad \inf_v \sup_g [J(v, g) - J(0, g) - \gamma \|g\|],$$

où γ est positif *arbitrairement petit* et où dans (10) c'est la norme de g qui apparaît et non plus son carré (comme c'était le cas dans (7)).

La solution de (10) est dite « *contrôle à moindres regrets* ». \square

On a dans le cours étudié cette notion pour divers systèmes d'évolution paraboliques ou hyperboliques, donnant le système d'équations et d'inéqua-

tions variationnelles caractérisant la solution v_γ de (10). On a étudié le comportement de v_γ lorsque $\gamma \rightarrow 0$. On a également étudié les normes $\|g\|$ (et même les *semi* normes) qui permettent un passage à la limite ($\gamma \rightarrow 0$).

J.-L. L.

PUBLICATIONS

Diverses publications consacrées au *Contrôle à moindres regrets* :

1) Cours de l'Ecole d'Eté d'Almeria (Espagne). Pareto optimal control (Optimal no-regret control).

2) Article en hommage à E. Magenes : Sur les contrôles à moindres regrets.

3) Article en hommage à L. Markus : Remarks on insensitive controllability.

4) Contrôle à moindres regrets des systèmes distribués. C.R. Acad. Sc. Paris 315, (1992), p. 1253-1257.

Sur le thème de la Contrôlabilité :

Mesures de contrôlabilité. Proc. Georgian Acad. of Sciences. Vol. I.

Modélisation et analyse mathématique du système océan-atmosphère :

Série de travaux en collaboration avec R. TEMAM et S. WANG.

Les premières publications sont :

1) New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. Non linearity 5 (1992), p. 237-288.

2) On the equations of the large scale ocean. id. p. 1007-1053.

3) Modèles et analyse mathématique du système océan-atmosphère, 2 notes CRAS, fin 1992.

Analyse numérique de la contrôlabilité :

Quelques remarques sur la contrôlabilité en liaison avec les questions d'environnement. Article en hommage à R. Dautray.

Travail en cours avec R. Glowinski en vue d'une publication à Acta Numerica.

Exposé à la séance de l'Académie des Sciences pour les 10 ans du Cadas.

Le temps du Contrôle. La vie des Sciences. 1993.

World Math. Year 2000 and Computer Sciences. Dans Lecture Notes in Computer Sciences. Vol. 653, 1992, p. 3-16.

MISSIONS

Conférence à l'ETH, Zurich, mai 1993.

Conférence au Colloque d'Analyse Numérique de Giens, mai 1993.

Conférence aux journées Maxwell, Bordeaux.

Conférences à l'IMPA, Rio de Janeiro, août 1993.

Conférences au Chili (Santiago), septembre 1993.

DISTINCTIONS

Commandeur de la Légion d'Honneur, 1^{er} janvier 1993.

Docteur Honoris Causa de l'Université de Malaga.

Membre étranger de l'Académie des Sciences du Chili.