Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1) Le but du cours, et de ceux des années prochaines, est l'étude des problèmes mathématiques posés par la climatologie. Cette étude est menée en collaboration avec Roger TEMAM et Shouhong WANG.

On commence par la modélisation mathématique, basée, autant qu'il est possible sur des lois physiques générales, des deux « sous-systèmes » de l'atmosphère et de l'océan liquide, et surtout, de leur couplage.

Pour chacun des sous-systèmes notés « a » pour l'atmosphère et « s » pour l'océan (sea ; la notation « o » prêterait à confusion !), on fait l'hypothèse hydrostatique qui consiste (essentiellement) à négliger la vitesse verticale dans la 3^e composante des équations de Navier-Stokes, compressibles pour « a », incompressibles pour « s ». Donc, z désignant la coordonnée verticale (ou radiale)

$$(1) \qquad \frac{\partial p^a}{\partial z} + \rho^a g = 0, \ \frac{\partial p^s}{\partial z} + \rho^s g = 0$$

où p^a, ρ^a désignent respectivement pression et densité dans l'atmosphère (et notations analogues pour « s ») et où g désigne l'accélération de la pesanteur.

Dans la mesure où l'on sait vérifier sur la (ou les) solutions(s) du modèle finalement obtenu que $q^a \geqslant 0$ (ce qui est physiquement évident bien sûr) la fonction p^a est monotone de z. Si donc l'on est en coordonnées sphériques $\{\varphi, \theta, z\}$, on peut passer en coordonnées $\{\varphi, \theta, p^a = p\}$, et on travaillera pour « a » dans ce système de coordonnées.

Cette idée est due à N.A. PHILLIPS, 1957, J. METEO. 14. On désigne par v^a, w^a (resp. v^s, w^s) la vitesse « horizontale » et la vitesse verticale dans « a » (resp. « s »). Dans le système $\{\varphi, \theta, p\}$, on introduit la nouvelle vitesse verticale

(2) $$w^a = \frac{dp^a}{dt} \quad \text{(dérivée totale).}$$

On a alors la propriété que nous appelons *de p-incompressibilité*

(3) $$div\ v^a + \frac{\partial w^a}{\partial p} = 0$$

où *div* est pris sur la sphère (on simplifie ici les notations !).

Dans la partie *« s »* on à l'*incompressibilité* qui se traduit par

(4) $$div\ v^s + \frac{\partial w^s}{\partial z} = 0.$$

Ce sont les propriétés (3) et (4) qui permettent (après a-dimensionalisation) d'arriver à un système unique couplé océan atmosphère pour lequel on peut obtenir *« assez » d'estimations a priori* pour pouvoir en déduire *les résultats d'existence globaux* en t. On peut alors en déduire — même si l'on n'a pas résolu le problème de l'unicité éventuelle — des schémas numériques stables, d'étudier les attracteurs, et d'avoir un modèle « robuste » lorsque l'on introduit de nouveaux sous systèmes (océan solide, chimie, etc.).

2) On désigne par T^a *(resp.* T^s*)* la température dans *« a » (resp. « s »),* par q l'humidité (quotient de ρ^a par la densité de vapeur d'eau) et par S la salinité, ces deux dernières fonctions inconnues étant définies bien entendu dans *« a »* et dans *« s »*.

L'équation d'état utilisée pour l'air est

(5) $$p^a = Rp^aT^a \quad , \quad R = \text{constante des gaz pour l'air sec,}$$

donc loi inadéquate pour l'air humide. Une loi généralement admise est

(6) $$p^a = Rp^aT^a\,(1 + 0{,}61q)$$

On ne sait pas traiter (6) mais ce qui du point de vue numérique revient au même,

(6*bis*) $$p^a = Rp^aT^a\,(1 + 0{,}61q^+) \quad , \quad q^+ = sup\,(q,0),$$

en notant que bien sûr $q^+ = q$ si $q \geqslant 0$, ce qui est physiquement évident mais ne l'est pas sur les équations obtenues, à cause de termes sources et puits qui sont largement phénoménologiques [(1)] [(2)]

Pour *« s »* on utilise

(7) $$q^s = q^s_0\,(1 - \alpha\,(T - T^s_0) \; + \beta\,(S - S_0))$$

---

(1) Pour la Physique des phénomènes, cf. J.P. PEIXOTO et A.H. OORT, Physics of Climate, American Institute of Physics, 1992.

(2) Il en résulte que des travaux sur les tendances *à très long terme,* qu'il s'agisse de simulations numériques, ou, comme nous le faisons, d'estimations sur les attracteurs, ne peuvent être considérés comme ayant, pour le moment, une valeur prédictive.

où q_0^s est une densité de référence, T_0^s, S_0 une température et une salinité de référence et où α et β sont deux paramètres positifs.

Les équations dans « a » sont

$$\frac{\partial v^a}{\partial t} + v^a \nabla v^a + w^a \frac{\partial v^a}{\partial p} + L_1^a v^a = f_1^a - \nabla \phi \tag{8}$$

$$\frac{\partial T^a}{\partial t} + v^a \nabla T^a + w^a \frac{\partial T^a}{\partial p} + L_2^a T^a = f_2^a, \tag{9}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v^a \nabla q + w^a \frac{\partial q}{\partial p} + L_3^a q = f_3^a \tag{10}$$

où L_1^a est un opérateur elliptique du 2^e^ ordre (où l'on a inclus les termes d'ordre 0 dûs à Coriolis) et où L_2^a, L_3^a sont aussi des opérateurs elliptiques du 2^e^ ordre (diffusion). On les a pris linéaires dans le cours. On a étendu cela [(3)] de manière à pouvoir utiliser des modèles de turbulence grande échelle dûs à SMAGORINSKI (1963), Monthly Weather Rev., 91, p. 99-164. Dans (8), on a posé $\phi = gz$ (inconnu en coordonnées φ, θ, p). Les termes f_i^a sont des termes sources et puits, qui peuvent être des fonctions linéaires des inconnues [(4)].

Dans « s » les équations ont la même structure :

$$\frac{\partial v^s}{\partial t} + v^s \nabla v^s + w^s \frac{\partial v^s}{\partial z} + L_1^s v^s = f_1^s - \frac{1}{\rho_0^s} \nabla p^s \tag{11}$$

$$\frac{\partial T^s}{\partial t} + v^s \nabla T^s + w^s \frac{\partial T^s}{\partial z} + L_2^s T^s = f_2^s, \tag{12}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v^s \nabla S + w^s \frac{\partial S}{\partial z} + L_3^s S = f_3^s. \tag{13}$$

3) Le système « a » est étudié dans $0 < p_0 \leqslant p \leqslant P$, où p_0 est « petit » représentant le haut de l'atmosphère et où P représente la pression terrestre moyenne. La surface isobare $p = P$ ne coincide pas avec la surface de la terre, supposée sphérique. On prendra en fait P un peu plus grand de manière à passer essentiellement « au-dessus » des montagnes [(5)]. Par conséquent si l'on trouve une solution de (1)...(13) alors

(3) J.-L. LIONS, R. TEMAM, S. WANG, Problèmes à frontière libre pour les modèles couplés de l'océan et de l'atmosphère. C.R.A.S. 1994.

(4) On *pourrait* considérer des fonctions non linéaires mais cela n'a pas été étudié.

(5) On « supprime » ainsi l'orographie. C'est absurde pour la météorologie. C'est ce qui est fait pour la climatologie. Des procédés *numériques* existent pour tenter de tenir compte de l'orographie. Leur validation théorique est ouverte.

(14) $$\phi|_{p=P} = g\zeta^a$$

où ζ^a est la hauteur par rapport à la surface de référence de l'isobare $p = P$. Le système *« s »* est étudié pour $\{\varphi, \theta\} \in$ surface de l'océan liquide et pour $-$ h $(\varphi, \theta) \leqslant z \leqslant 0$, où $h\ (\varphi, \theta)$ représente le fond de l'océan. Le fait que l'océan soit limité supérieurement pour $z = 0$ est la célèbre et classique hypothèse dite « du toit rigide ». Elle a fait couler beaucoup d'encre. Toutes les grandes simulations numériques de l'océan, publiées dans les dernières années, sont basées sur cette hypothèse et donnent des résultats remarquables. On tente néanmoins d'aller un peu au-delà, en introduisant la hauteur ζ^s de l'océan par rapport à $z = 0$.

On arrive alors à deux systèmes :

(I) $\left\{\begin{array}{l}\text{le système à toit rigide (1)...(13), où } \varphi \\ \text{est essentiellement un multiplicateur de Lagrange}\end{array}\right.$

et

(II) $\left\{\begin{array}{l}\text{le système à surface libre (1)...(13) } \textit{et} \text{ les équations pour} \\ \zeta^a,\ \zeta^s \text{ et où } \varphi \text{ et } p^s \text{ s'expriment en fonction de } \zeta^a \text{ et } \zeta^s.\end{array}\right.$

4) La principale difficulté restante, en ce qui concerne la modélisation, est celle des conditions aux limites à l'interface Γ^i océan-atmosphère (interface que l'on doit considérer dans la coordonnée

(15) $$\left\{\begin{array}{ll} \eta = \dfrac{P - p}{P - p_0} & \textit{pour « a »} \\[2ex] \eta = \dfrac{z}{h} & \textit{pour « s »} \end{array}\right.$$

et où $\eta = 0$ correspond donc du point de vue physique à une « interface épaisse ».)

Désignons par $\dfrac{\partial v^a}{\partial n_{L_1^a}}$ *(après le changement de variables (15)), (resp.* $\dfrac{\partial v^s}{\partial n_{L_1^s}}$*) la dérivée conormale relative à* L_1^a *(resp.* L_1^s), la normale géométrique étant orientée vers *l'extérieur de « a »* (resp. de *« s »*)

Les conditions d'interface sont alors

(16) $$\frac{\partial v^a}{\partial n_{L_1^a}} = -\,k|\,v^a - v^s|(v^a - v^s)\ ,\quad \frac{\partial v^s}{\partial n_{L_1^s}} = -\,k|\,v^a - v^s|(v^a - v^s),$$

où k est une constante positive, et des conditions de ce type pour les autres inconnues T^a, q, T^s, S.

5) On peut alors adapter à la situation présente les méthodes introduites par les équations de NAVIER STOKES par J. LERAY. Des différences techni-

ques significatives sont dûes à la présence d'opérateurs *non locaux,* après élimination de w^a et w^s, et d'autre part aux conditions aux limites (16). Les détails sont donnés dans [6] pour le système (I) et ont été donnés dans le cours. On a également présenté dans le cours, les démonstrations pour (II), dont un résumé est dans (3).

6) Les cours ultérieurs étudieront les développements asymptotiques qui conduisent à une hiérarchie de modèles — et redonnent quelques-uns des modèles classiques. On étudiera également quelques modèles avec « turbulence ». Des travaux sur ce point sont en cours (R. LEWANDOWSKI, P. DELECLUSE). On étudiera également la modélisation de l'océan solide et des composantes chimiques. On espère arriver à assez d'estimations a priori pour avoir existence de solution(s) et des estimations d'attracteurs.

J.-L. L.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Octobre 1993 : Conférences au Congrès de l'Union Mathématique du Chili à Santiago du Chili, à l'Université du Chili et à l'Académie des Sciences du Chili.

Octobre 1993 : Conférences à l'Université de Pavie.

Novembre 1993 : Conférence à l'Université de Lisbonne puis à l'Université d'Indianapolis.

Janvier 1994 : Conférence à l'Université de Malaga (à l'occasion de la remise du Doctorat Honoris Causa).

Mars 1994 : Conférence à l'Université de Naples à l'occasion du Colloque « Les Mathématiques pour l'Industrie ».

Avril 1994 : Conférence à l'Université de Budapest.

Mai 1994 : Conférence à Bâle.

Septembre 1994 : Conférences à Stuttgart (Ecomas), Santander (IFIP), à Séville (Cours sur la Théorie du Contrôle), à Athènes.

DISTINCTIONS

Docteur Honoris Causa à l'Université du Chili Santiago du Chili.

Membre étranger de l'Académie des Sciences du Chili et de l'Académie des Sciences d'Argentine.

---

(6) J.-L. LIONS, R. TEMAM, S. WANG, 1994.