Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1) Le cours a porté sur les approximations quasi géostrophiques dans la modélisation climatologique et sur l'analyse des équations correspondantes.

On considère un modèle atmosphérique faisant intervenir la vitesse horizontale v, la vitesse verticale w, la densité ρ, la pression p, la température T et l'humidité q.

En suivant l'article LTW [1], on a obtenu dans le cours de 93/94 le système suivant, dans l'hypothèse dite hydrostatique :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho g. \tag{1}$$

Dans ce cas, on peut introduire le système de coordonnées θ, φ, p au lieu de $\{\theta, \varphi, z\}$, si z désigne l'altitude par rapport à un niveau $z = 0$ de référence. La conservation de la masse conduit à

$$div\ v + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{2}$$

où ω désigne la vitesse verticale dans les coordonnées θ, φ, p, et où div est pris sur la sphère $2D$.

On tient compte des ordres de grandeur des différentes quantités qui interviennent (cf. LTW [2] pour les détails techniques un peu fastidieux). Il faut renormaliser variables et inconnues ; la variable verticale est finalement

$$\eta = \frac{P - p}{P - p_0}$$

où p_0 désigne la pression au sommet de l'atmosphère (on peut prendre $p_0 = 0$, avec quelques précautions sur les espaces fonctionnels utilisés) et où P désigne la pression au voisinage de $z = 0$ (en fait un peu au-dessus. Cf. sur ce point LTW [3]). L'atmosphère occupe alors la région $0 < \eta < 1$.

On obtient en fin de compte le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v - W(v)\frac{\partial v}{\partial \eta} + L_1 v + \frac{1}{\varepsilon}\left[f.k \times v + \nabla \phi_s + \nabla \int_0^\eta \frac{T}{K_2}\,d\eta'\right] = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v\nabla T - W(v)\frac{\partial T}{\partial \eta} + L_2 T - \frac{1}{\varepsilon}\frac{W(v)}{K_2} = S_T \tag{4}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v\nabla q - W(v)\frac{\partial q}{\partial \eta} + L_3 q = S_q \tag{5}$$

$$div \int_0^1 v\,d\eta = 0, \quad W(v) = \int_0^\eta div\, v\,d\eta. \tag{6}$$

Dans (3) (4) (5) $v\nabla v$ est calculé sur la sphère 2D et

$$W(v) = \int_0^\eta div\, v\,d\eta'.$$

Les opérateurs L_i, $i = 1, 2, 3$, sont des opérateurs elliptiques linéaires à coefficients variables réguliers. Le vecteur $k = \{0, 0, 1\}$ de sorte que si $v = \{v_1, v_2\}$, alors $k \times v = \{-v_2, v_1\}$ et le terme $\frac{1}{\varepsilon} f\, k \times v$ correspond aux effets de Coriolis si $f = 2\cos\theta$, θ désignant la colatitude. Dans (3) et (4), K_2 est une fonction non singulière de η. Enfin dans (3), ϕ_s est une fonction inconnue indépendante de η, qui est un multiplicateur de Lagrange attaché à la contrainte (6).

Les fonctions S_T et S_q sont données et correspondent aux sources et aux puits.

Le paramètre ε peut être considéré comme petit. *On cherche les développements asymptotiques en* ε *des solutions du système* (3) ... (6) (solutions qui existent pour tout $t > 0$ dans un sens faible, ce qui a été démontré dans le cours de l'an dernier, sous des conditions aux limites raisonnables).

2. Il y a deux cas à considérer. Dans un cas, on garde $f = 2\cos\theta$ et on cherche un développement *global,* sur toute la sphère — ce cas, qui n'a pas été présenté dans le cours de cette année, sera repris dans le cours de l'an prochain. Une autre situation, plus classique en météorologie, consiste à chercher un développement asymptotique de f au voisinage d'une latitude θ_0 telle que

$$2\cos\theta_0 = 1. \quad \text{(pour fixer les idées)}$$

Alors *dans la région* définie par $|\theta - \theta_0|$ assez petit, on peut développer f

$$f = f^0 + \varepsilon f^1 + \dots . \tag{7}$$

Si l'on cherche alors des développements

$$v = v^0 + \varepsilon v^1 + \dots,$$
$$T = T^0 + \varepsilon T^1 + \dots, \qquad \phi_s = \phi_s^0 + \varepsilon \phi_s^1 + \dots$$
$$q = q^0 + \varepsilon q^1 + \dots.$$

on obtient pour les termes en ε^{-1} :

$$f^0 k \times v^0 + \nabla \phi_s^0 + \nabla \int_0^\eta \frac{T^0}{K_2} d\eta' = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{K_2} W(v^0) = 0. \tag{9}$$

On obtient, pour les termes en ε^0 :

$$\frac{\partial v^0}{\partial t} + v^0 \nabla v^0 - W(v^0) \frac{\partial v^0}{\partial \eta} + L_1 v^0 + f^1 k \times v^0 \tag{10}$$

$$= - f^0 k \times v^1 - \nabla \phi_s^1 - \nabla \int_0^\eta \frac{T^1}{K_2} d\eta'$$

$$\frac{\partial T^0}{\partial t} + v^0 \nabla T^0 - W(v^0) \frac{\partial T^0}{\partial \eta} + L_2 T^0 = S_T + \frac{W(v^1)}{K_2} \tag{11}$$

$$div \int_0^1 v^0 \, d\eta = 0. \tag{12}$$

L'équation pour q^0 est *découplée.* Si v^0 est connu alors q^0 est solution de

$$\frac{\partial q^0}{\partial t} + v^0 \nabla q^0 - W(v^0) \frac{\partial q^0}{\partial \eta} + \mathrm{L}_3 q^0 = S_q. \tag{13}$$

Tout cela bien sûr avec les conditions initiales et les conditions aux limites convenables.

En fait les conditions (8) et (9) se simplifient et se réduisent à (8), les termes indexés « 1 » dans (10) (11) correspondant aux multiplicateurs de LAGRANGE de ces contraintes.

On a démontré dans le cours *l'existence d'une solution faible globale en* t *de* (10) (11) (8).

3. La convergence de v, T, q vers v^0, T^0, q^0, lorsque $\varepsilon \to 0$, est un problème qui a été posé dans le cours. Il existe des oscillations en t/ε et une couche limite en $t = 0$, même dans des analogues linéaires des problèmes précédents.

Ce problème a donné lieu, après la fin du cours, à des développements intéressants dûs à F. MURAT puis à J. GRENIER, publié au CRAS. De très intéressants résultats ont été obtenus sur ces questions par J.Y. CHEMIN.

J.-L. L.

Bibliographie succincte

— LTW (J.L. Lions, R. Temam, S. Wang) [1] Models for the coupled atmosphere and ocean. Computational Mechanics Advances. Vol. 1, N° 1, 1993, p. 3-120.

— LTW [2] Geostrophic asymptotics of the primitive equations of the atmosphere. Topological Methods in non linear Analysis. Journal of J. Schauder-Center. Vol. 4, 1994, p. 253-287. (Volume dédié à J. Leray)

— LTW [3] Problèmes à frontière libre pour les modèles couplés de l'océan et de l'atmosphère, CRAS, 1994.

Publications liées au cours

— J. Grenier, CRAS, 1995.

— J.Y. Chemin, CRAS, 1995.

Missions

Décembre 1994 : Conférences à l'Académie des Sciences d'Argentine.

Mi-mars 1995 : Conférences à la Maison Descartes à Amsterdam.

4-5 juillet 1995 : Conférence à ICIAM, Hambourg.

Distinctions

Membre honoraire de l'Académie des Sciences d'Argentine.

Vice-Président de l'Académie des Sciences de Paris, à partir du 1er janvier 1995.