Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Considérons, comme premier exemple, un contrôle ponctuel oscillant rapidement. L'état du système, noté $y(x, t)$, est solution de l'équation parabolique linéaire

(1)
$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v(t) \quad \delta(x - b(\tau)),\ 0 < x < 1, \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \\ y(x, 0) = 0 \quad \text{pour } 0 < x < 1, \end{array} \right.$$

où

(2) $v(t)$ est la fonction « contrôle »,

et où

(3)
$$\left| \begin{array}{l} \delta(x - b(\tau)) = \text{masse de Dirac } + 1 \text{ au point } x = b(\tau), \\ \tau = t/\epsilon,\ \tau \to b(\tau) \text{ étant une fonction continue de} \\ R \to [b_0 - b_1],\ [b_0 + b_1] \subset\ ]0, 1[\end{array} \right.$$

Pour chaque choix de v dans $L^2(0, T)$, le problème (1) admet une solution unique, notée $y(x, t) = y(x, t\,; v) = y_\epsilon(x, t\,; v)$ (elle dépend de ϵ puisque $\tau = t/\epsilon$).

On considère alors la fonctionnelle (fonction coût de la théorie du contrôle)

(4)
$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2} \int_0^T v^2(t)dt + \frac{\alpha}{2} \| y(., T\,; v) - y^T \|^2,$$

où $\| \quad \|$ = norme dans $L^2(\Omega)$ $\alpha > 0$, et où y^T désigne un élément de $L^2(\Omega)$ donné.

Pour chaque $\epsilon > 0$ donné, le problème

(5)
$$v \in L^2(0, T) \inf J\epsilon(v)$$

admet une solution unique, notée v_ϵ

Quel est le comportement de υ_ϵ lorsque $\epsilon \to 0$, lorsque l'on fait une hypothèse supplémentaire sur la structure de b par exemple si $\tau \to b(\tau)$ est périodique, ou presque périodique ?

□

Deuxième exemple : on considère un système dont l'état est donné par les équations de Stokes avec contrôle distribué, le fluide étant en rotation par rapport à l'axe des x_3. Plus précisément, on considère l'ouvert

$$\left| \begin{array}{l} \Omega = g \times]0, L[, \\ g \quad \text{ouvert de } \mathbf{R}^2. \end{array} \right. \tag{6}$$

Dans Ω, on considère les équations

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \mu \Delta y + \dfrac{1}{\epsilon} k \times y = - \nabla p + \upsilon \chi \\ \operatorname{div} y = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

où

$k = \{0, 0, 1\}$, $\mu > 0$
χ = fonction caractéristique de $\omega \times]0, L[$, $\bar{\omega} \subset g$,
$\upsilon \in \mathscr{U}$ = sous espace vectoriel fermé de $L^2(\omega \times (0, L))^3$,
p = pression,

avec les conditions aux limites

$$y = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega = \text{frontière de } \Omega \tag{8}$$

ou bien

$$\left| \begin{array}{ll} y = 0 & \text{sur } \partial g \times]0, L[, \\ y & \text{périodique sur } x_3, \text{ de période } L, \end{array} \right. \tag{8bis}$$

et avec la condition initiale

$$y(x, 0) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{9}$$

Le problème (7) (8) ou (8*bis*) (9) admet une solution unique notée $y(x, t ; \upsilon) = y_\epsilon(x, t ; \upsilon)$.

On introduit la fonction coût

$$J_\epsilon(\upsilon) = \frac{1}{2} \int_0^T \| \upsilon \|^2_{L^2(\omega \times (0, L))^3} dt + \frac{\alpha}{2} \| y_\epsilon(., T ; \upsilon) - y_\epsilon^T \|^2 \tag{10}$$

où $\| \quad \|$ = norme dans $L^2(\Omega)^3$, $\alpha > 0$, y_ϵ^T = élément donné (dépendant de ϵ) de $L^2(\Omega)^3$. On introduit le groupe $G(\tau)$ défini comme suit

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \tau} + k \times \varphi = - \nabla \rho \qquad \text{dans } \Omega, \\ div \ \varphi = 0 \end{array} \right. \tag{11}$$

(12) $$\varphi n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

ou

(12*bis*) $$\varphi n = 0 \quad \text{sur } \partial g \times (0, L)$$
$$\varphi_3(x_1, x_2, 0, \tau) = \varphi_3(x_1, x_2, L, \tau) \text{ sur } g$$

et

(13) $$\varphi(x, 0) = \varphi^0(x)$$

Alors

(14) $$G(\tau)\varphi^0 = \varphi(., \tau).$$

Ce groupe opère également dans l'espace des fonctions d'énergie finie pour le problème (7), avec les conditions aux limites adéquates, de sorte que l'on peut introduire z défini par

(15) $$y = G(\tau)z \qquad (z = G(-\tau)y)$$

(ce qui veut dire : $y(t) = G(t/\epsilon)z(t)$).

On obtient alors :

(16) $$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \mu\, \Delta\, z = -\nabla q + G(-\tau)\,(\upsilon\chi) \\ div\ z = 0 \end{array} \right.$$

et les conditions aux limites initiales sur z étant les mêmes que celles pour y.

La fonction coût devient

(17) $$J_\epsilon(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_0^T \| \upsilon \|^2_{L^2(\omega \times (0, L))^3}\, dt + \frac{\alpha}{2} \| z(T\,;\, \upsilon) - G(-T/\epsilon)y^T_\epsilon \|^2$$

Si l'on suppose que $G(-T/\epsilon)y^T_\epsilon = y^T$ indépendant de ϵ, la fonction coût (17) a exactement la même structure que (4).

□

On introduit alors un cadre plus abstrait, qui contient comme cas particuliers les deux exemples précédents et beaucoup d'autres.

On considère un triplet d'espaces de Hilbert réels

$$V \subset H \subset V'$$

V' étant le dual de V lorsque H est identifié à son dual, V étant dense dans H. On considère l'équation d'état

(18) $$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay = B(\tau)\upsilon \\ y \in L^2(0, T\,;\, V), \qquad y|_{t=0} = 0 \end{array} \right.$$

où

(19) $$\left| \begin{array}{l} A \in \mathscr{L}\ (V\,;\,V'), \\ <A\varphi, \varphi> \ \geq\ \beta\|\varphi\|^2_{V}, \qquad \beta > 0, \qquad \forall\ \varphi \in V \end{array} \right.$$

et où

(20) $$\left| \begin{array}{l} v \in L^2(0, T\,;\,U), \text{ espace de Hilbert (sur } \mathbf{R}) \\ B(\tau) \in \mathscr{L}\ (U\,;\,V'),\ \tau = t/\epsilon, \end{array} \right.$$

la fonction $\tau \rightarrow \beta\tau)$ *étant* presque périodique de $\mathbf{R} \rightarrow \mathscr{L}\ (U\,;\,V')$.

On désigne par y la solution de (18) (les conditions aux limites sont « cachées » dans la formulation « abstraite ») ; elle dépend de ϵ puisque $\tau = t/\epsilon$. On introduit la fonction coût

(21) $$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2}\int_0^T <Nv,\, v> dt + \frac{\alpha}{2}\ \|\ y(T\,;\,v) - y - T\ \|^2$$

où $\alpha > 0$,

$$N \in \mathscr{L}\ (U, U'),\ <Nv,\, v> \sim\ \|v\|^2_U \qquad \forall\ v \in U,$$
$$\|\qquad\| = \text{norme dans } H$$

et l'on cherche le comportement asymptotique, lorque $\epsilon \rightarrow 0$, de la solution v_ϵ du problème

(22) $$v \in L^2(0, T\,;\,U) \ \inf\ J\epsilon(v).$$

Remarque

Le premier exemple entre clairement dans le cadre général. Pour le deuxième exemple (à part le changement de notation de y en z) il faut utiliser un résultat de presque périodicité en τ du groupe $G(\tau)$ défini en (14). Ce « résultat », souvent utilisé par de nombreux auteurs, ne semble démontré nulle part. Des éléments en faveur de ce résultat (très certainement vrai) ont été donnés dans le cours. Le résultat est vrai (et facile) dans le cas où Ω est un cube, les conditions aux limites étant de périodicité. On calcule alors explicitement le groupe $G(\tau)\,;$ cela est classique et fournit, dans ce cas, le résultat.

□

Les résultats généraux sont les suivants.

On suppose que

(23) $$\begin{array}{l} B(\tau) = B_0 + \sum_m B_m \cos \lambda_m \tau + \sum_m \mathscr{B}_m \sin \lambda_m \tau, \\ \sum_m \|B_m v\|^2_{V'} + \sum_m \|\mathscr{B}_m v\|^2_{V'} < \infty \qquad \forall v \in U. \end{array}$$

On considère l'équation d'état

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = B_0 v_0 + \sum_m B_m v_m + \sum_m \mathscr{B}_m w_m \tag{24}$$

où

$$\int_0^T [\| v_0 \|_U^2 + \sum_m \| v_m \|_U^2 + \sum_m \| w_m \|_U^2] dt < \infty$$

avec $y|_{t=0} = 0$.

On introduit la fonction coût

$$J(v_0, v_m, w_m) = \frac{1}{2} \int_0^T < Nv_0, v_0 > dt + \sum_m \int_0^T < Nv_m, v_m > dt +$$
$$+ \sum_0 \int_0^T < Nw_m, w_m > dt + \frac{\alpha}{2} \| y(T) - y^T \|^2,$$

où y est la solution de (24). Alors

$$\inf J_\epsilon(v) \to \inf_{(v_0, v_m, \omega_m)} J(v_0, v_m, w_m) \tag{25}$$

et $v_\epsilon \to v_m^k$, $v_\epsilon \cos \lambda_m t \to v_m^+$, $w_\epsilon \sin \lambda_M t \to w_m^*$ dans $L^2(0, T ; U)$ faible, où v_0^*, v_m^*, w_m^* est la solution de inf $J(v_0, v_m, w_m)$.

Ce résultat peut expliquer les intéressants résultats numériques obtenus, relativement au premier exemple indiqué dans ce résumé, par M. Berrgren, Thèse de Ph. D. Université de Houston, 1995.

Missions

— Octobre 1995 : Conférences aux Journées Industrie-Recherche de Malaga.

— Octobre 1995 : Conférences plénières à la réunion annuelle du SIAM, Charlotte, USA.

— Novembre 1995 : Conférence à Madrid.

— Janvier 1996 : Conférences aux Journées Industrie-Recherche de Pise.

— Janvier-Février 1996 : Leçons à l'Ecole Normale Supérieure de Pise, dans le cadre de la chaire Galilée.

— Février 1996 : Conférences à l'Université de Séville.

— Avril 1996 : Conférences à l'Université de Helsinki.

— Mai 1996 : Conférences à Taïwan.

— Président de la Commission d'Enquête de l'Agence Spatiale Européenne sur l'échec du 1er lancement d'Ariane 5.

Distinctions

— Election comme Membre Etranger de la Royal Society, de la National Academy of Sciences des USA, de TWAS (Third World Academy of Sciences).

— Elu Honorary Fellow du Tata Institute of Fundamental Research.