Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis Lions, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

On considère l'écoulement d'un fluide non Newtonien du type de Oldroyd. Un modèle, généralement considéré comme adéquat, est donné, en variables sans dimension par

$$(1) \qquad Re\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u\right) - (1 - \alpha)\Delta u = \nabla.\tau - \nabla p + f,$$

$$(2) \qquad \operatorname{div} u = 0$$

$$(3) \qquad We\left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + u\nabla\tau + g_u(\tau, \nabla u)\right) + \tau = 2\alpha\, D(u)$$

où

Re, We sont deux nombres positifs (Reynolds et Weissenberg),

$$0 < \alpha < 1,$$

$$D(u) = \frac{1}{2}\,(\nabla u + {}^t\nabla u),$$

$$g_a(\tau, \nabla u) = \tau W(u) - W(u)\tau - a(D(u)\tau + \tau D(u))$$

$$\tau = \{\tau_{ij}\} = \text{tenseur symétrique},$$

$$W(u) = \frac{1}{2}\,(\nabla u + {}^t\nabla u),\ a \in [-1,\ 1].$$

Si $We = 0$, on porte (3) dans (1) et on obtient les équations de Navier Stokes.

Naturellement il faut ajouter les conditions aux limites. Si l'écoulement a lieu dans un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, on peut prendre

$$(4) \qquad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ t > 0.$$

Il n'y a pas de conditions aux limites sur τ. Les conditions initiales sont

$$(5) \qquad u(0) = u^0,\ \tau(0) = \{\tau_{ij}^0\} = \tau^0,$$

u^0, τ^0 donnés dans des espaces convenables.

Les équations (3) expriment que le fluide a une **mémoire.**

Très peu de résultats sont connus sur les équations (1) ... (5) (sauf si $We = 0$).

On a surtout désiré attirer l'attention sur cette situation, pour laquelle seuls sont connus des résultats d'existence de solution pour **des temps suffisamment petits.** Les résultats les plus fins connus au moment du cours sont ceux de E. Fernandez Cara, F. Guillen et Rubens Ortega, de l'Université de Séville.

De nombreux schémas d'approximation numérique sont utilisés dans la littérature. On a rappelé le principe fondamental, basé sur le « splitting up » qui consiste à calculer alternativement une approximation pour (1) puis pour (2). Tous les résultats numériques signalent des difficultés avec *We* **assez grand.** Mais on ne sait pas s'il s'agit d'un artefact ou d'une difficulté fondamentale. Il n'est pas impossible que, pour *We* assez grand, les solutions fortes **locales** en t **explosent** en temps fini. Mais cette question semble, elle aussi, ouverte.

On est passé ensuite au **contrôle** des fluides **à mémoire.** Le cas général semble pour l'instant hors d'atteinte, autre que numériquement et formellement. Un cas extrêmement particulier, sans signification physique, peut s'exprimer ainsi. On considère le modèle **linéaire**

$$(6)\qquad \left|\begin{array}{l} Re\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - (1-\alpha)\Delta u = \nabla.\tau - \nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ (We)\dfrac{\partial \tau}{\partial t} + \tau = 2\alpha D(u). \end{array}\right.$$

Posant $\sigma = \nabla.\tau$, (6) se réduit à

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{l} Re\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - (1-\alpha)\Delta u = \sigma - \nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ (We)\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \alpha\Delta u, \end{array}\right.$$

avec (4) et (5). On peut évidemment résoudre l'équation en σ explicitement :

$$(8)\qquad \sigma = \sigma^0 e^{-t/We} + \frac{1}{We} e^{-t/We} *_{(t)} (\alpha\Delta u)$$

Portant (8) dans la première équation (7), on obtient un système du type des équations de Stokes mais avec une mémoire. Par exemple si $\sigma^0 = 0$, on a :

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{l} (Re)\dfrac{\partial u}{\partial t} - (1-\alpha)\Delta u - \dfrac{\alpha}{We}\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{t-s}{We}} \Delta u(x,s)\,ds = \\ = -\nabla p + f, \\ \operatorname{div} u = 0,\ u(0) = u^0. \end{array}\right.$$

On suppose maintenant que f est **une fonction de contrôle,** par exemple

$$(10) \quad \left| \begin{array}{l} f = \{0, f_2, f_3,\}, \\ f_2, f_3 \text{ à support dans } \mathcal{O}, \mathcal{O} \subset \Omega \end{array} \right.$$

On a étudié l'ensemble décrit par $\{u(\mathrm{T}), \tau(\mathrm{T})\}$ lorsque f_2, f_3 décrivent l'espace $L^2(\mathcal{O} \times (0,T))^2$.

On a pu montrer ainsi quelques résultats de contrôlabilité approchée très faible.

Pour terminer on a présenté quelques résultats sur les fluides de Oldroyd tournants.

PUBLICATIONS EN RELATIONS AVEC LE COURS ET LE SÉMINAIRE

— Livre en préparation de Fernandez-Cara et son groupe à Séville.

— Diverses publications sur le contrôle de systèmes à mémoire, et collaboration avec E. Zuazua, Professeur à Complutense, Madrid et du point de vue numérique avec R. Glowinski.

DISTINCTIONS

— Élection comme Membre Étranger de la Royal Society, de la National Academy of Sciences des USA, de TWAS (Third World Academy of Sciences), avril 1996.

— Membre de l'Académie des Sciences de Georgie, 28 juin 1996.

— Président de l'Académie des Sciences de Paris pour 1997 et 1998.

MISSIONS

— Paris, 12 septembre 1996 : Conférences au Congrès Écomass.

— Athènes, 26 septembre 1996 : Conférences au Congrès des Mathématiciens Grecs.

— Beijing, 14-18 janvier 1997 : Conférences à l'Academia Sinica.

— Tours, 6 mai 1997 : Conférences au Colloque de Tours.

— Réunions pour le Benchmarking des Mathématiques aux USA par la National Academy of Sciences.