Analyse mathématique des systèmes et de leur contrôle

M. Jacques-Louis LIONS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cadre général est l'ensemble de conjonctures suivantes :

(i) Les systèmes instables, chaotiques, turbulents sont « approximativement contrôlables » avec « peu » de contrôle.

(ii) Les mêmes systèmes sont « bon marché » à contrôler pour aller d'un état d'équilibre à un état quelconque (et d'autant meilleur marché que plus instables) et sont, au contraire, « très chers » à contrôler (en général) pour aller d'un état quelconque à un état d'équilibre.

J'ai formulé ces conjonctures, pour la (i) en 1989, pour la (ii) en 1995. De nombreuses équipes travaillent sur ces conjonctures, et ont obtenu des résultats significatifs pour (i) : J.-M. Coron, G. Lebeau, E. Zuazua, J.-P. Puel et d'autres.

Pour (ii), j'ai obtenu des résultats avec E. Zuazua en 96-97. Certains de ces résultats font l'objet du cours 97/98. Des résultats numériques ont été obtenus pour les équations de Kuramoto-Shivashinsky en collaboration avec J. Périaux et R. Glowinski.

Voici quelques énoncés précis. Considérons l'équation.

$$\frac{\partial y}{\partial t} + k\Delta y + \Delta^2 y = mv \text{ dans } \Omega \times (0, T) \tag{1}$$

où

$$k > 0 \text{ très grand}$$

$$m = \text{fonction caractéristique de } \Omega_0 \subset \Omega$$

avec

$$y = 0 \text{ si } t = 0 \tag{2}$$

et

(3) $$y = 0, \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T)$$

ou tout autre ensemble de conditions aux limites.

Soit alors

(4) $$M(k) = \inf . \frac{1}{2} \int \int_{\Omega \times (0, T)} mv^2 dxdt$$

pris pour tous les v tels que si $y(x, t ; v)$ est la solution de (1) (2) (3), alors

(5) $y(x, T ; v)$ est « voisin » d'une fonction donne $y^T \in L^2(\Omega)$,
$T > 0$ donné.

Alors une forme précise de la conjoncture est

(6) $$M(k) \to 0 \text{ si } k \to +\infty$$

(noter que lorsque k est « très grand » (1) (2) (3) est « très instable »).

Une forme approchée de ce théorème a été démontrée en 1997 par E. Zuazua et l'auteur et elle est présentée dans le cours 97/98.

Autre résultat de ce type pour les équations de Navier Stokes, lorsque la viscosité $\to$ 0.

Autres résultats pour des équations de type Petrowsky.

Membre d'académies étrangères

— Académie Royale des Sciences d'Espagne (1997).

— Académie des Sciences du Portugal (1997).

— Membre étranger du KAST (Académie des Sciences et de la Technologie de Corée) (1997).

— Membre de la Chinese Acad. of Sciences (1998)

Membre doctor honoris causa

— Jérusalem (1997).

— Jian Tong Univ. Shanghai (1998).

— Jian Jong Univ. Xian (1998).

— BUAA Beijing (1998).

— Mexico (1998).

Distinctions

— Président de l'Académie des Sciences de Paris pour 1997 et 1998.

— Ordre du Soleil Levant, Étoile d'Or et d'Argent (1998).

Missions

— Conférences Rio de Janeiro, Pise, Milan, Madrid, Lisbonne, Washington, ... (1997).

— Conférencier aux Congrès Internationaux de Calcul Scientifique Taïwan, Buenos Aires, Athènes (1998).

— Prix WT et Idalia Reid, SIAM (1998).