

Chapitre 6

L'effet Efimov exploré avec des gaz d'atomes froids

Sommaire

1	Le taux de recombinaison à trois corps	2
1-1	Loi d'échelle pour le coefficient L_3	2
1-2	Partie $a < 0$ de la résonance.	3
1-3	Partie $a > 0$ de la résonance.	4
1-4	Lien entre les deux côtés de la résonance.	5
2	Observation des principales caractéristiques	6
2-1	Première observation sur le césium	6
2-2	Connexion des régions $a < 0$ et $a > 0$	7
2-3	La suite géométrique d'Efimov	9
2-4	Le croisement dimère - trimère	10
3	Le paramètre à trois corps	12
3-1	Une coïncidence surprenante?	12
3-2	L'approche hypersphérique	13
3-3	Emergence d'un cœur dur en $\sim 2R_{\text{vdW}}$	14
4	Au delà de l'effet Efimov standard	16
4-1	Trois fermions identiques	16
4-2	Trois particules discernables	17
4-3	Quatre bosons identiques	17
4-4	N_f fermions identiques et une autre particule	18

Ce dernier chapitre est consacré à la description des principales manifestations expérimentales de l'effet Efimov dans des gaz d'atomes ultrafroids. Cette exploration détaillée a été rendue possible grâce aux résonances de diffusion, appelées dans ce contexte *résonances de Fano–Feshbach*, qui permettent d'ajuster la longueur de diffusion a à une valeur considérablement plus grande (en valeur absolue) que la portée b des potentiels inter-atomiques.

Dans ces expériences, la caractérisation des trimères d'Efimov se fait essentiellement par un signal de pertes d'atomes ou de dimères. Le taux de pertes passe par un maximum ou un minimum en des points bien particuliers du diagramme énergétique $E(a)$ rappelé en figure 1. Nous allons détailler les processus en jeu en §1 et montrer comment il a été possible d'observer les principales caractéristiques de la physique d'Efimov de part et d'autre de la résonance, ce qui revient à relier la physique pour $a < 0$ à celle pour $a > 0$ (§2).

Signalons qu'il est également possible d'utiliser des méthodes de spectroscopie (incohérente ou cohérente) basées sur un processus de photoassociation pour étudier différentes facettes de l'effet Efimov. Nous ne aborderons pas ici et nous renvoyons les lecteurs intéressés vers LOMPE, OTTENSTEIN et al. (2010), NAKAJIMA, HORIKOSHI et al. (2011), MACHTEY, SHOTAN et al. (2012), YUDKIN, ELBAZ et al. (2019) et YUDKIN, ELBAZ et al. (2020).

Les expériences menées entre 2006 et 2010 sur les gaz d'atomes froids

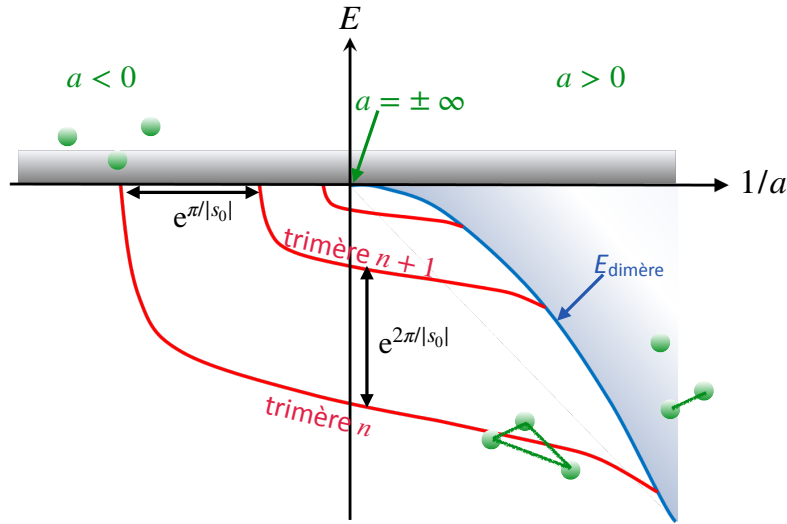


FIGURE 1. Représentation schématique des énergies E des trimères d'Efimov en fonction de $1/a$ (l'échelle n'est pas respectée). Le nombre imaginaire pur s_0 a pour module $|s_0| = 1.00624$ (cf. chapitre 5).

ont révélé une propriété inattendue. On attendait pour le paramètre à trois corps R_0 des valeurs *a priori* aléatoires, au moins dans le modèle d'interaction de portée nulle. En fait, pour les interactions de van der Waals en r^{-6} qui sont dominantes dans ce domaine de basse température, on trouve que le paramètre à trois corps est étroitement lié au rayon de van der Waals, $R_{\text{vdW}} = \frac{1}{2} (mC_6/\hbar^2)^{1/4}$. Nous discuterons l'origine de ce lien en nous appuyant sur le formalisme de l'approche hypersphérique (§ 3).

La dernière partie (§ 4) sera consacrée à la présentation de quelques effets allant au delà de celui initialement considéré par Efimov. Nous nous intéresserons notamment au cas des fermions, éventuellement accompagnés d'une particule supplémentaire pour les lier. Notre présentation sera loin d'être exhaustive; nous renvoyons donc les lecteurs spécifiquement

intéressés par le problème quantique à petit nombre de corps vers le numéro spécial des Comptes Rendus de Physique de l'Académie des Sciences de janvier 2011 et vers les articles de revue récents de NAIDON & ENDO (2017), GREENE, GIANNAKEAS et al. (2017) et D'INCAO (2018).

1 Le taux de recombinaison à trois corps

1-1 Loi d'échelle pour le coefficient L_3

La plupart des expériences menées à ce jour sur les gaz d'atomes froids utilisent un signal de perte d'atomes pour détecter les seuils d'apparition des trimères d'Efimov. Ces pertes se produisent notamment quand trois atomes (supposés ici être des bosons identiques) sont voisins l'un de l'autre, avec la possibilité de former une molécule. Pour un gaz atomique uniforme de densité moyenne ρ_A , la décroissance du nombre d'atomes N_A obéit alors à la loi

$$\frac{dN_A}{dt} = -\frac{g^{(3)}}{3!} L_3 \rho_A^2 N_A. \quad (1)$$

Dans cette équation, le facteur $g^{(3)}$ rend compte du groupement bosonique qui doit être pris en compte si le gaz est non-dégénéré (effet Hanbury-Brown et Twiss) : il correspond à la somme des différentes contributions liées à la symétrie d'échange des trois bosons et il vaut alors $g^{(3)} = 3! = 6$. Pour un condensat pur, il n'y a pas de corrélations densité-densité et $g^{(3)} = 1$. On pourra consulter KAGAN, SVISTUNOV et al. (1985) et SÖDING, GUÉRY-ODELIN et al. (1999) pour plus de détails.

Une simple analyse dimensionnelle, éventuellement complétée par un traitement plus quantitatif (FEDICHEV, REYNOLDS et al. 1996), montre que dans le cadre des interactions de portée nulle, le coefficient de perte L_3 s'écrit comme

$$L_3 = 3C(a) \frac{\hbar a^4}{m} \quad (2)$$

Dans cette expression, le coefficient C est un nombre sans dimension dépendant du rapport a/R_0 , où R_0 est le paramètre à trois corps nécessaire pour régulariser le problème au voisinage de l'origine. En dehors de tout effet Efimovien, FEDICHEV, REYNOLDS et al. (1996) avaient prédit $C = 3.9$.

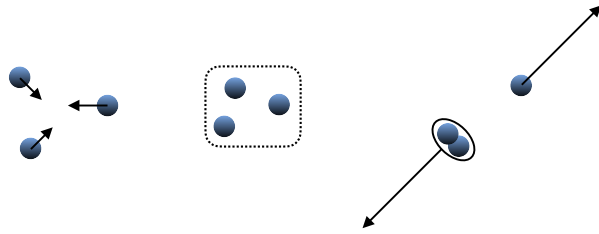


FIGURE 2. Recombinaison à trois corps assistée par la formation intermédiaire d'un état d'Efimov d'énergie quasi-nulle, du côté $a < 0$ de la résonance ($a \approx a_-^{(n)}$). L'état final contient un dimère fortement lié non décrit par l'approche du pseudo-potentiel.

Quand on prend en compte les effets liés à la physique d'Efimov, les processus en jeu dans cette recombinaison à trois corps diffèrent selon que l'on s'intéresse à la partie $a < 0$ ou $a > 0$ et nous allons donc les détailler dans ce qui suit.

Notons que la mesure de L_3 dans un gaz d'atomes froids piégés est généralement affectée par la température. La limite $\sim \hbar a^4/m$ est notamment remplacée par $\sim \hbar \lambda^4/m$ quand la longueur d'onde thermique λ devient inférieure à a . Nous n'aborderons quasiment pas ces effets de température finie dans ce qui suit et nous renvoyons le lecteur intéressé par exemple vers REM, GRIER et al. (2013) et EISMANN, KHAYKOVICH et al. (2016), dans lesquels le chauffage qui accompagne ces processus de recombinaison est pris en compte dans la dynamique du gaz.

1-2 Partie $a < 0$ de la résonance.

De ce côté de la résonance, les trimères se forment directement à partir d'une collision entre trois atomes libres (figure 2). Au seuil de formation, là où la longueur de diffusion s'approche d'un des $a_-^{(n)}$, ces trimères ont une énergie quasi-nulle, une grande extension et ils ont donc un recouvrement fort avec la fonction d'onde des atomes libres. Une fois ce trimère formé, il peut se désintégrer en relâchant un atome libre et un dimère fortement lié (non décrit par l'approche pseudo-potentiel, mais bien présent pour les

potentiels interatomiques réels). On s'attend donc à une augmentation de L_3 autour de chaque valeur $a = a_-^{(n)}$.

Cet effet a été initialement prédit par ESRY, GREENE et al. (1999a) et on trouvera des références détaillées dans les articles de revue récents de NAIDON & ENDO (2017), GREENE, GIANNAKEAS et al. (2017) et D'INCAO (2018). L'analyse de la recombinaison à trois corps et de la formation de dimères fortement liés conduit à l'expression suivante¹ pour le coefficient L_3 (BRAATEN & HAMMER 2004) :

$$a < 0 : \quad C(a) \approx C' \frac{\sinh(2\eta)}{\sin^2 \left[|s_0| \ln(a/a_-^{(0)}) \right] + \sinh^2 \eta} \quad (3)$$

avec $C' \approx 4590$. Ce résultat dépend d'un paramètre ajustable, le nombre sans dimension η , appelé *paramètre d'inélasticité*.

La signification physique du paramètre η est relativement simple : pour tenir compte des pertes à trois corps et établir le résultat (3), on résout l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde hyperradiale $\phi(R)$ en modifiant la condition aux limites aux courtes distances. Jusqu'ici, nous avons posé pour $R \ll |a|, k^{-1}$:

$$\phi(R) \sim \frac{1}{\sqrt{R}} \sin \left[|s_0| \ln(R/R_0) \right] \sim \frac{1}{\sqrt{R}} \left[e^{i|s_0| \ln(R/R_0)} - e^{-i|s_0| \ln(R/R_0)} \right] \quad (4)$$

où les deux termes à l'intérieur du crochet peuvent s'interpréter comme les ondes sortantes et entrantes dans une collision à trois corps : dans cette collision, l'hyperrayon a initialement une valeur grande devant toutes les longueurs caractéristiques du problème. Il décroît vers des valeurs de l'ordre de la portée des potentiels, ce qui correspond à la situation physique où les trois particules sont relativement proches l'une de l'autre. Il repart ensuite vers l'infini, ce qui signifie qu'au moins une des trois particules est loin des deux autres. La description d'une collision inélastique se fait en imposant au flux de sortie de la collision d'être strictement inférieur au flux entrant, ce qui revient à poser la condition aux limites :

$$\phi(R) \sim \frac{1}{\sqrt{R}} \left[e^{-2\eta} e^{i|s_0| \ln(R/R_0)} - e^{-i|s_0| \ln(R/R_0)} \right]. \quad (5)$$

1. La structure de cette expression est très voisine de celle donnant la transmission d'une cavité optique Fabry-Perot, connue sous le nom de fonction d'Airy. Cette similarité n'est bien sûr pas fortuite, les deux problèmes étant formellement similaires.

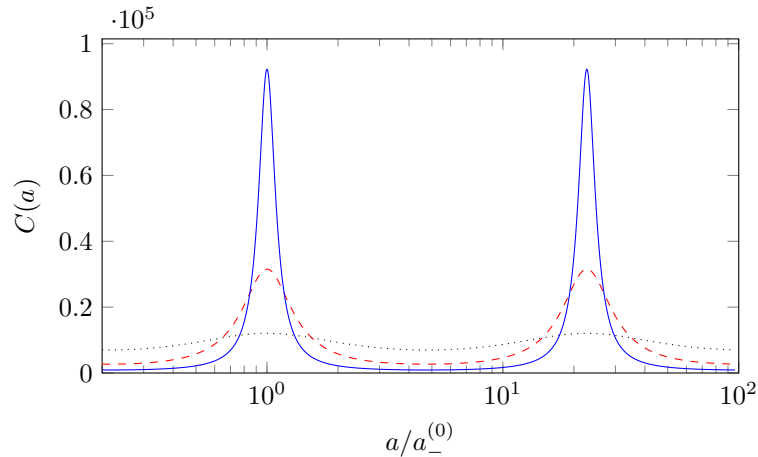


FIGURE 3. Coefficient normalisé de pertes par recombinaison à trois corps, $C(a) \equiv L_3/(3\hbar a^4/m)$, du côté $a < 0$ de la résonance avec $\eta = 0.1$ (trait continu bleu), $\eta = 0.3$ (trait tireté rouge) et $\eta = 1$ (trait pointillé noir).

La détermination de (3) à partir de cette nouvelle condition aux limites est décrite par BRAATEN & HAMMER (2004) et BRAATEN & HAMMER (2006).

Le paramètre η varie selon les espèces atomiques et la force des transitions conduisant vers les dimères fortement liés. On vérifiera sur la figure 3 que ce coefficient L_3 (normalisé par la valeur "nue" $3\hbar a^4/m$) passe par un maximum pour toutes les valeurs de a égales à un des $a_-^{(n)}$ (l'argument du sinus est alors un multiple de π).

On définit la *longueur de recombinaison* (ESRY, GREENE et al. 1999a) :

$$\rho_3 = (\mu L_3/\hbar)^{1/4} \quad (6)$$

où $\mu = m/\sqrt{3}$ est la masse réduite à trois corps. On s'attend à ce que les résonances décrites ci-dessus ne soient bien visibles que si cette longueur est plus faible que la longueur d'onde thermique des particules, ce qui impose de travailler avec des gaz suffisamment froids (voir par exemple la figure 9). Cette condition est plus difficile à remplir pour les trimères excités que pour le trimère fondamental $n = 0$, puisque L_3 augmente avec n

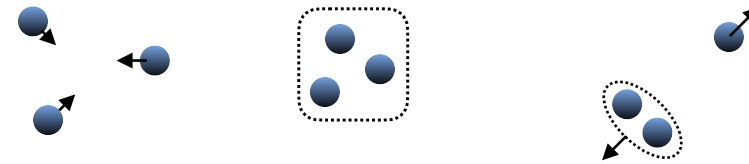


FIGURE 4. Recombinaison à trois corps assistée par la formation intermédiaire d'un état d'Efimov d'énergie quasi-nulle, du côté $a > 0$ de la résonance. L'état final fait intervenir le dimère faiblement lié d'énergie $-\hbar^2/ma^2$. Le taux de recombinaison normalisé $C(a)$ présente des minima ($a_+^{(n)}$) et des maxima ($a_p^{(n)}$) correspondant à un processus d'interférence entre les différents canaux conduisant à cet état final. Contrairement au cas $a < 0$, le calcul de ce taux peut être fait entièrement dans le cadre du modèle du pseudo-potentiel et il ne nécessite pas l'introduction d'un paramètre supplémentaire (en dehors de R_0).

(l'expression de L_3 fait intervenir a^4).

1-3 Partie $a > 0$ de la résonance.

Dans ce cas, l'existence du dimère faiblement lié d'énergie $-\hbar^2/ma^2$ ouvre une nouvelle voie de recombinaison à trois corps (figure 4) : trois atomes libres entrant en collision peuvent donner naissance à un de ces dimères, le troisième atome repartant de manière isolée. Un tel processus peut être analysé entièrement dans le cadre de notre approche en terme de pseudo-potentiel, puisqu'il ne fait pas intervenir d'états fortement liés. Le résultat du calcul du coefficient L_3 ne fait donc pas intervenir de paramètre ajustable (contrairement au cas $a < 0$ où η intervient) et on trouve (ESRY, GREENE et al. 1999b; BEDAQUE, BRAATEN et al. 2000; PETROV 2004; BRAATEN & HAMMER 2007a; D'INCAO 2018) :

$$a > 0 \text{ (dimères faiblement liés)} : \quad C(a) \approx C''' \sin^2 \left[|s_0| \ln \left(\frac{a}{a_+^{(1)}} \right) \right] \quad (7)$$

avec²

$$a_+^{(0)} \approx 0.20 a_*^{(1)} \quad C'' \approx 67.1. \quad (8)$$

L'annulation de ce taux pour les valeurs $a_+^{(n)} = a_+^{(0)} e^{n\pi/|s_0|}$ s'interprète comme un effet d'interférence destructive entre les différents chemins conduisant à la production du dimère lors d'une collision de trois atomes. Dans un tel processus, l'hyperrayon est initialement très grand, il décroît, puis repart à l'infini. Plusieurs canaux correspondant aux potentiels hypersphériques peuvent avoir simultanément une contribution significative et le terme en $\sin^2[\dots]$ de (7) peut être compris comme une oscillation de Stückelberg, résultant du couplage entre ces différents canaux. L'article de revue de D'INCAO (2018) fournit une description détaillée de ces différents chemins.

Notons qu'on trouve également dans la littérature la notation $a_p^{(n)}$ pour le maximum de la fonction $\sin^2[\dots]$ intervenant dans (7). Chaque maximum $a_p^{(n)}$ est à mi-chemin (en coordonnées logarithmiques) entre deux minima successifs $a_+^{(n)}$ et $a_+^{(n+1)}$, et on a donc :

$$a_p^{(n)} = a_+^{(n)} \sqrt{22.7} \approx a_*^{(n+1)}. \quad (9)$$

La variation de $C(a)$ pour $a > 0$ est tracée en figure 5.

1-4 Lien entre les deux côtés de la résonance.

Dans le régime universel, on peut relier les points remarquables côté $a < 0$, c'est-à-dire les valeurs seuils $a_-^{(n)}$ pour l'existence d'un trimère, et les points remarquables côté $a > 0$, c'est-à-dire le croisement 'dimère-trimère' $a_*^{(n)}$, ou encore le minimum du taux de recombinaison à trois corps $a_+^{(n)}$. Le résultat de BRAATEN & HAMMER (2006) [leurs équations (200) et (201)] affiné par GOGOLIN, MORA et al. (2008) [leur équation (19)] donne :

$$\boxed{\frac{a_-^{(n)}}{a_*^{(n)}} \approx -21.31} \quad (10)$$

2. Nous repérons ici $a_+^{(0)}$ par rapport à $a_*^{(1)}$ au lieu de $a_*^{(0)}$. En effet, quand on va au delà de la limite de portée nulle et qu'on considère un potentiel réel de type van der Waals, la branche du trimère $n = 0$ ne croise pas la branche du dimère, ce qui entraîne que le point $a_*^{(0)}$ est repoussé à l'infini (voir la discussion à la fin de §2-1).

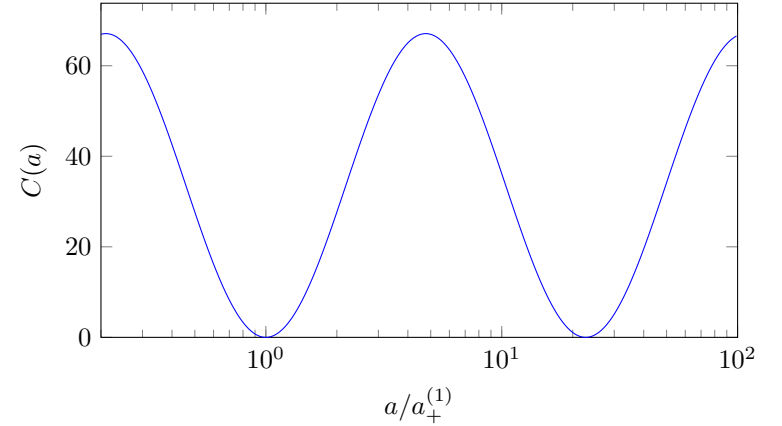


FIGURE 5. Coefficient normalisé de pertes par recombinaison à trois corps, $C(a) \equiv L_3/(3\hbar a^4/m)$, du côté $a > 0$ de la résonance. La valeur de $a_+^{(n)}$ est $\approx 4.5 a_*^{(n)} \approx 0.20 a_*^{(n+1)}$, où $a_*^{(n)}$ désigne le point de rencontre entre dimère et la n -ème branche du trimère. Dans le modèle qui conduit à cette prédiction, la recombinaison se fait uniquement vers le dimère faiblement lié qui existe de ce côté-ci de la résonance.

ce qui signifie que $a_-^{(n)}$ est en fait proche (en valeur absolue) de $a_*^{(n+1)}$:

$$\frac{a_-^{(n)}}{a_*^{(n+1)}} \approx -0.939 = -\frac{1}{1.065}. \quad (11)$$

On déduit de cette relation le lien entre a_- et a_+ , qui sont les quantités les plus facilement accessibles à partir de la mesure du taux de recombinaison à trois corps entre atomes du gaz :

$$\boxed{\frac{a_-^{(n)}}{a_+^{(n)}} = -4.7} \quad (12)$$

Ces principales relations sont récapitulées sur la figure 6, extraite de XIE, GRAAFF et al. (2020).

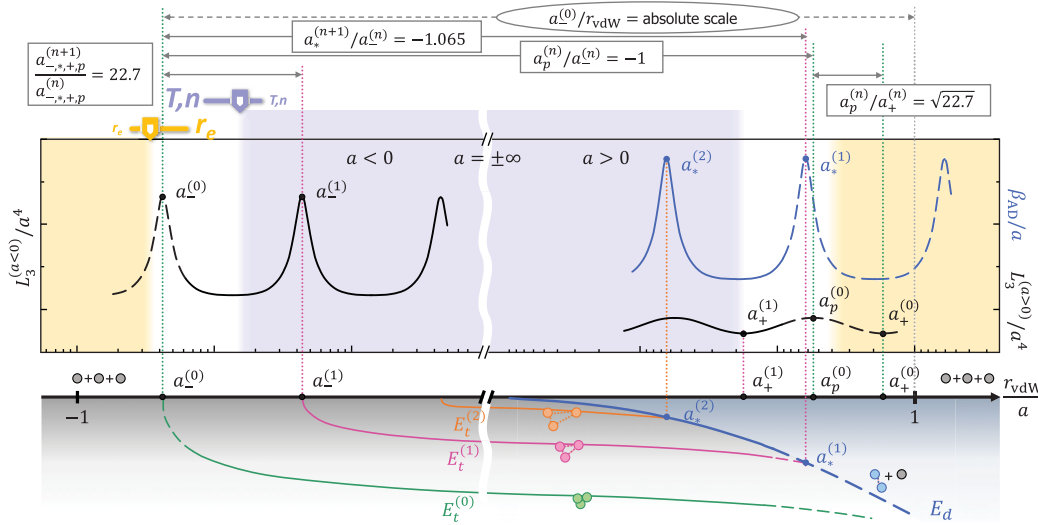


FIGURE 6. Liens entre les côtés $a < 0$ et $a > 0$ pour les principales caractéristiques de la physique d'Efimov. Figure extraite de XIE, GRAAFF et al. (2020).

2 Observation des principales caractéristiques

2-1 Première observation sur le césium

Dans le domaine des gaz d'atomes froids, la première mise en évidence claire d'un effet Efimov a été faite par KRAEMER, MARK et al. (2006). L'expérience a été menée sur un gaz de césium préparé dans son état hyperfin³ le plus bas $|f = 3, m_f = 3\rangle$ autour d'une résonance de Feshbach. L'atome de césium se prête bien à ce type d'expériences pour deux raisons :

- La longueur de diffusion "de fond" a_{bg} , c'est-à-dire bien en dehors d'une résonance [cf. cours 2020-21], est grande devant la portée R_{vdW} : $a \approx 2200 a_0 \approx 20 R_{vdW}$, ce qui assure qu'on aura généralement affaire à des résonances larges, pour lesquelles l'universalité liée à la descrip-

3. Rappelons que le noyau de ^{133}Cs a un spin $i = 7/2$ de sorte que le couplage hyperfin avec le spin $1/2$ de l'électron de valence donne naissance à deux états, $f = 3$ et $f = 4$.

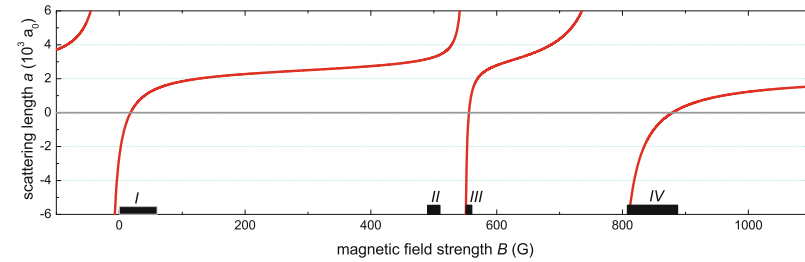


FIGURE 7. Prédiction théorique pour la longueur de diffusion $a(B)$ d'un gaz de césium dans l'état $|f = 3, m_f = 3\rangle$, quand on ne prend en compte que les couplages aux dimères de moment cinétique nul. Figure extraite de FERLAINO, ZENESINI et al. 2011.

tion en terme de pseudo-potentiel sera assurée. Quand on prend seulement en compte les interactions avec les états moléculaires de moment cinétique nul, on arrive ainsi au diagramme $a(B)$ de la figure 7.

- Le césium étant un élément lourd, les effets relativistes jouent un rôle important dans la dynamique du couplage électronique. Cela ajoute des couplages significatifs avec des états moléculaires de moment cinétique non nul, et vient donc enrichir le diagramme $a(B)$. Un zoom sur la région de faible champ magnétique (marquée par le symbol I en figure 7) est représenté en figure 8.

KRAEMER, MARK et al. (2006) ont étudié la variation du taux de recombinaison à trois corps en se plaçant autour de $B = 7.5$ G, où a prend des valeurs grandes en valeur absolue et négatives. Leur résultat principal est montré en figure 9. Pour les points à basse température (10 nK), on constate une augmentation forte du taux de recombinaison à trois corps au voisinage de $a_{-}^{(0)} = -872(22) a_0$, correspondant au seuil d'apparition du trimère d'Efimov fondamental. La ligne continue rouge de la figure 9 correspond à un ajustement par la prédiction théorique (3) pour $\eta = 0.10$ (3).

Il est intéressant de comparer les propriétés du trimère observé par KRAEMER, MARK et al. (2006) et celles du trimère fondamental He_3 observé par SCHÖLLKOPF & TOENNIES (1994) (voir chapitre précédent). Comme montré par LEE, KOEHLER et al. (2007), ces deux trimères ont en

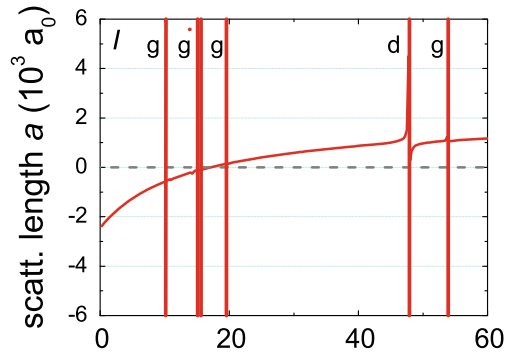


FIGURE 8. Prédiction théorique pour la longueur de diffusion $a(B)$ d'un gaz de césium dans l'état $|f = 3, m_f = 3\rangle$, quand on ajoute les couplages aux dimères de moment cinétique non nul. L'axe des abscisses indique le champ magnétique exprimé en Gauss. Figure extraite de FERLAINO, ZENESINI et al. 2011.

commun le fait que leur branche énergétique, prolongée du côté des valeurs de a petites et positives, ne croise jamais la branche du dimère [voir également BRUCH & SAWADA (1973) et YUDKIN, ELBAZ et al. (2020)]. De ce point de vue, ni le trimère He_3 , ni le trimère Cs_3 de KRAEMER, MARK et al. (2006) ne satisfont l'ensemble des critères que l'on peut imposer à un édifice efimovien. En revanche, l'état observé par KRAEMER, MARK et al. (2006) est indubitablement un état borroméen puisqu'il existe dans une zone $a < 0$ pour laquelle il n'existe pas de dimère dans un état faiblement lié (il y a bien sûr des dimères Cs_2 fortement liés, mais c'est une autre physique). Par comparaison, rappelons que He_3 a été observé pour $a > 0$, donc dans une zone où le dimère He_2 faiblement lié existe : ce n'était donc pas un état borroméen.

Signalons également que l'expérience de KRAEMER, MARK et al. (2006) a exploré de manière continue une zone de champ magnétique conduisant à des longueurs de diffusion de part et d'autre de $a = 0$. En plus du pic remarquable montré en figure 9 obtenu pour $a < 0$, les auteurs ont également observé des pics du côté $a > 0$. Toutefois, il est important de signaler qu'on ne s'attend pas dans ce cas à une relation universelle entre les deux domaines. Ces relations universelles sont obtenues entre les zones $a < 0$ et

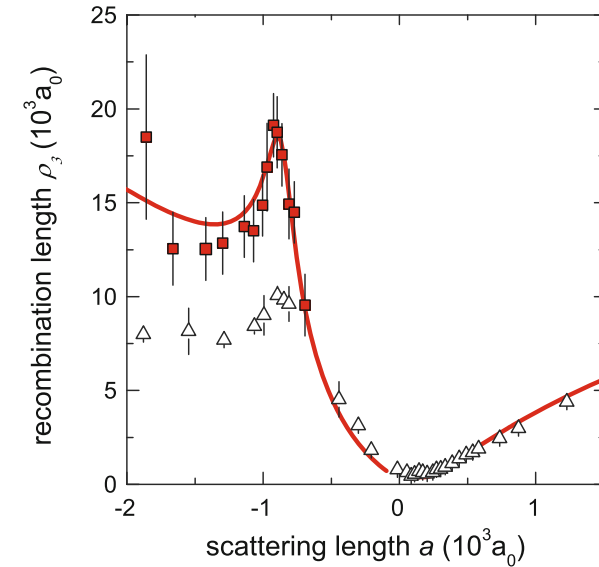


FIGURE 9. Longueur de recombinaison à trois corps [définie en (6)] mesurée par KRAEMER, MARK et al. (2006). Les carrés rouges (resp. triangles noirs) correspondent à une température de 10 nK (resp. 200 nK). Figure adaptée de FERLAINO, ZENESINI et al. 2011.

$a > 0$ encadrant une résonance $a = \pm\infty$, pas un point d'annulation de a .

2-2 Connexion des régions $a < 0$ et $a > 0$

En 2009, plusieurs groupes expérimentaux ont annoncé avoir réussi à connecter les deux domaines $a > 0$ et $a < 0$ situés autour d'une résonance $a = \infty$: KNOOP, FERLAINO et al. (2009), GROSS, SHOTAN et al. (2009), ZACCANTI, DEISSLER et al. (2009) et POLLACK, DRIES et al. (2009). Pour les deux derniers cités, on pourra également consulter leur réanalyse partielle des données dans ROY, LANDINI et al. (2013) et DYKE, POLLACK et al. (2013).

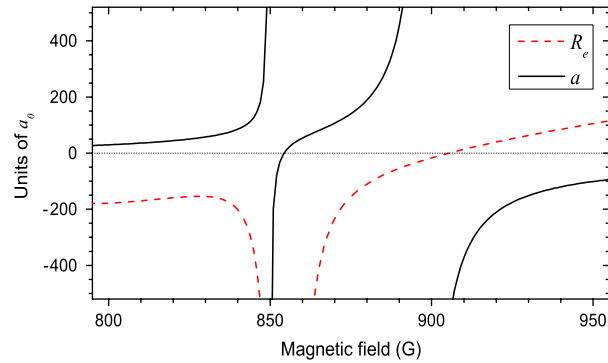


FIGURE 10. Longueur de diffusion et portée effective pour le résonance de Feshbach de ${}^7\text{Li}$. Figure extraite de GROSS, SHOTAN et al. (2009).

Nous allons nous intéresser à l'expérience de GROSS, SHOTAN et al. (2009). Elle a été menée sur un gaz d'atomes de ${}^7\text{Li}$ (bosons) préparés dans l'état se connectant à $|f = 1, m = 0\rangle$ en champ nul (le niveau fondamental de l'atome de ${}^7\text{Li}$ est clivé en deux sous-niveaux hyperfins $f = 1$ et $f = 2$). Deux résonances de Feshbach à 846 G et 894 G entrent en jeu (figure 10), avec pour résultat une zone dans laquelle a diverge, tout en gardant une valeur relativement faible pour la portée effective r_e (résonance large). Cette configuration est donc bien adaptée à la recherche de l'universalité efimovienne.

Nous présentons sur la figure 11 le résultat obtenu par GROSS, SHOTAN et al. (2009) pour la mesure du coefficient L_3 de part et d'autre de la résonance.

- Côté $a < 0$ (correspondant aux grandes valeurs de B), L_3 passe par un maximum en $a_-^{(0)} = -264$ (11) a_0 et un ajustement des mesures par (3) donne $\eta_- = 0.236$ (42). Ce résultat donne $|a_-^{(0)}| \sim 8.5 r_e$, de sorte que le régime universel est bien atteint. La température du gaz ($1 \mu\text{K}$) ne permet pas d'observer la résonance suivante, attendue pour une valeur 22.7 fois plus grande de $|a|$.
- Côté $a > 0$ (correspondant aux petites valeurs de B), on observe le début du comportement oscillant attendu pour L_3 [cf. (7)]. On trouve

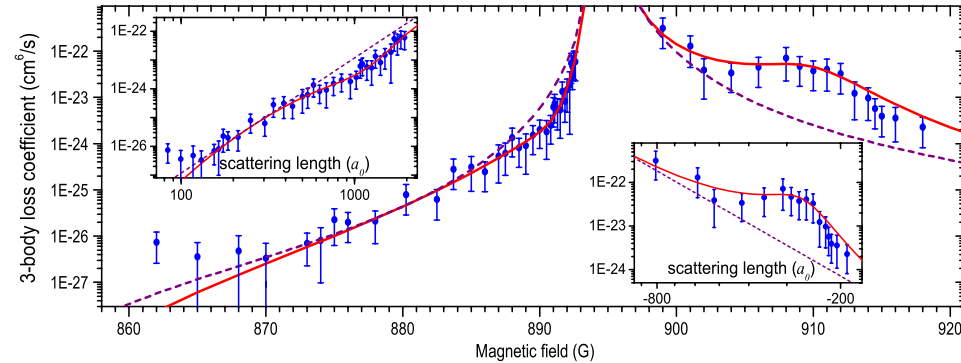


FIGURE 11. Taux de pertes à trois corps à travers une résonance de Feshbach pour un gaz de ${}^7\text{Li}$. Figure extraite de GROSS, SHOTAN et al. (2009).

en particulier un minimum prononcé de L_3 autour de $a_+^{(1)} = 1160 a_0$, correspondant à l'interférence destructive mentionnée en §1-3.

Nous avons annoncé en §1-4 le lien entre les deux côtés de la résonance avec pour une même branche de trimère

$$\frac{a_-^{(n)}}{a_+^{(n)}} = -4.7 \quad \text{ou encore} \quad \frac{a_-^{(n)}}{a_+^{(n+1)}} = -\frac{4.7}{22.7} = -0.21. \quad (13)$$

Le rapport entre les valeurs trouvées expérimentalement $a_-^{(0)} = -264 a_0$ et $a_+^{(1)} = 1160 a_0$ conduit au rapport -0.23 , proche de celui attendu si l'on suppose que les deux mesures portent sur deux trimères consécutifs. Comme l'écrivent GROSS, SHOTAN et al. 2009 dans leur conclusion, "This seems like an observation of the long hunted universal behavior of a three-body observable in a physical system with resonantly enhanced two-body interactions"!

Indiquons également le résultat obtenu par ZACCANTI, DEISSLER et al. (2009) et POLLACK, DRIES et al. (2009) après la réanalyse mentionnée plus haut et explicitée par NAIDON & ENDO (2017) :

- L'expérience de ZACCANTI, DEISSLER et al. (2009), menée sur ${}^{39}\text{K}$, a conduit à $a_-/a_+ = -3.1$ (0.3) [valeur avant réanalyse -6.7 (0.6)].
- L'expérience de POLLACK, DRIES et al. (2009), menée sur ${}^7\text{Li}$, a conduit à $a_-/a_+ = -2.8$ (0.3) [valeur avant réanalyse -2.5 (0.6)].

Ces résultats sont notablement plus loin de la limite universelle, probablement en raison des effets liés à la portée effective r_e , qui était relativement grande dans ces expériences. On pourra consulter la discussion approfondie de XIE, GRAAFF et al. (2020) pour plus de détails.

2-3 La suite géométrique d'Efimov

L'observation de deux résonances successives du même côté de la résonance permet de tester directement le facteur d'échelle 22.7 de la théorie d'Efimov. ZACCANTI, DEISSLER et al. (2009) et POLLACK, DRIES et al. (2009) ont mené des premières mesures pour tester cette loi sur les atomes de ^{39}K et ^7Li [voir également WILLIAMS, HAZLETT et al. 2009 pour l'observation d'un trimère excité].

Nous décrivons ici une expérience plus récente menée à Innsbruck par HUANG, SIDORENKOV et al. (2014) sur ^{133}Cs . Dans cette expérience, un soin particulier a été apporté à l'évaluation des effets de température finie et à l'extrapolation des quantités mesurées à température nulle. L'expérience a été menée sur une résonance de Feshbach à beaucoup plus haut champ que celle utilisée par KRAEMER, MARK et al. (2006), aux alentours de 800 G. Cette résonance large, couplée à un bon contrôle de la température du gaz dans le domaine de quelques nanokelvins, permet d'atteindre de grandes longueurs de diffusion, jusqu'à $10^5 a_0$.

Dans l'expérience de HUANG, SIDORENKOV et al. (2014), le gaz est préparé au voisinage de la dégénérescence quantique dans un piège hybride (magnétique + optique), à une température entre 7 et 10 nK. La taille de l'état fondamental du piège est de $\sim 5 \mu\text{m}$, à comparer à la taille attendue pour le deuxième trimère recherché $\sim 1 \mu\text{m}$: il y a assez de place pour ce trimère, mais le suivant (de taille 22.7 fois plus grande) ne logerait pas dans ce piège...

La figure 12 montre le résultat principal de HUANG, SIDORENKOV et al. (2014) avec un pic marqué du coefficient de perte à trois corps autour de $a = -17\,000 a_0$. Le trimère fondamental avait été observé auparavant par le même groupe (BERNINGER, ZENESINI et al. 2011) et il se forme pour $a_-^{(0)} = -963(11) a_0$, soit un rapport 17.7 là où l'universalité d'Efimov prédit 22.7.

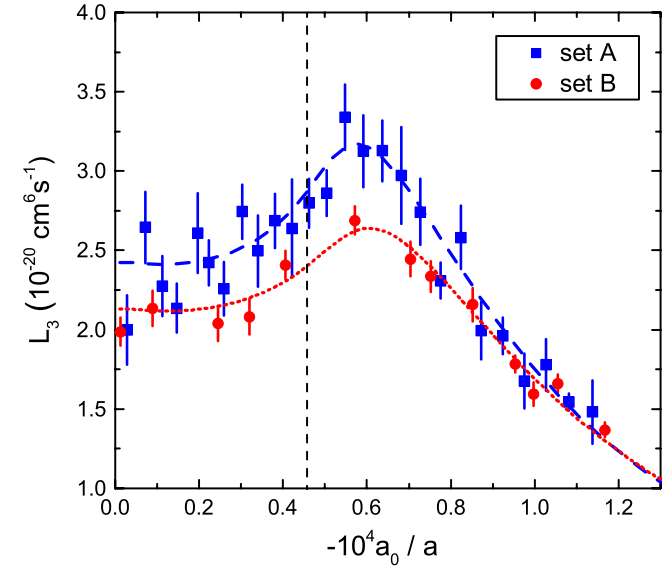


FIGURE 12. Observation du deuxième trimère d'Efimov pour le césium autour de 800 G. L'ajustement par un modèle théorique prenant en compte la température non nulle du gaz conduit à $a_-^{(1)} = -20\,190(1200) a_0$, soit $a_-^{(1)}/a_-^{(0)} = 21.0(1.3)$. Ensemble A : $T = 8.7$ nK, ensemble B : $T = 10.0$ nK. Figure extraite de HUANG, SIDORENKOV et al. (2014).

Cette déviation par rapport à la prédiction "universelle" d'Efimov peut être due (au moins en partie) à des effets liés à la température non nulle du gaz. Pour la position $a_-^{(0)}$ du trimère fondamental, les effets liés à la température sont peu importants. Pour prédire la valeur seuil $a_-^{(1)}$ pour le trimère suivant, HUANG, SIDORENKOV et al. (2014) ont utilisé le modèle développé par REM, GRIER et al. (2013). Ils ont analysé leurs données expérimentales en gardant la position $a_-^{(1)}$ et la température comme paramètres ajustables. L'ajustement a donné une température très proche de celle mesurée directement et fournit la valeur $a_-^{(1)} = -20\,190(1200) a_0$, soit un facteur 21.0(1.3) au dessus de $a_-^{(0)}$. C'est remarquablement proche de la valeur universelle d'Efimov (1.3σ d'écart). Par ailleurs, on s'attend de

toute façon à une déviation non négligeable par rapport à la loi d'échelle pour les tout premiers trimères $n = 0$ et $n = 1$, en particulier du fait des effets de portée non nulle (SCHMIDT, RATH et al. 2012).

Pour terminer ce paragraphe, rappelons que cette suite géométrique efimovienne a également été mise en évidence dans des mélanges mMM : l'expérience est alors moins contraignante car la raison de la suite géométrique est considérablement réduite quand on va vers des rapports $m/M \ll 1$ (voir chapitre 4).

2-4 Le croisement dimère - trimère

Une caractéristique importante du diagramme énergétique du côté $a > 0$ de la résonance se situe en $a_*^{(n)}$ quand l'énergie du trimère devient égale à l'énergie du dimère (le troisième atome étant quasiment au repos, infiniment loin du dimère). Si on part d'un mélange atomes-dimères, on s'attend à ce que le taux de pertes β_{AD} pour ce mélange soit maximal en un tel point : lors d'une collision atom-dimère, les partenaires vont passer beaucoup de temps au voisinage les uns des autres, ce qui favorise la transition vers d'autres états plus profondément liés (figure 13). L'argument est le même que celui qui conduit à une augmentation du taux de pertes à trois corps du côté $a < 0$ de la résonance aux points $a_-^{(n)}$.

La première mise en évidence des pertes dans un mélange atomes-dimères dues à cet effet a été publiée par KNOOP, FERLAINO et al. (2009). Nous allons nous intéresser ici aux expériences plus récentes du groupe de Boulder, décrites par CHAPURIN, XIE et al. (2019) et XIE, GRAAFF et al. (2020), qui ont permis de vérifier l'universalité d'Efimov entre la valeur a_* et les autres points remarquables du diagramme énergétique.

XIE, GRAAFF et al. (2020) ont travaillé avec un gaz de ^{39}K préparé dans l'état hyperfin $|f = 1, m_f = -1\rangle$ autour de $B = 33.6$ Gauss. Nous avons décrit dans le cours 2020-21 les propriétés de la résonance de Fano-Feshbach correspondante. Cette résonance a le mérite d'avoir une portée effective assez petite ($r_e \approx 130 a_0$ à résonance), ce qui permet d'augmenter la plage d'universalité des effets efimoviens. CHAPURIN, XIE et al. (2019) avaient étudié le côté $a < 0$ de cette résonance et trouvé $a_-^{(0)} = -908(11) a_0$ et $\eta = 0.25(1)$ (figure 14).

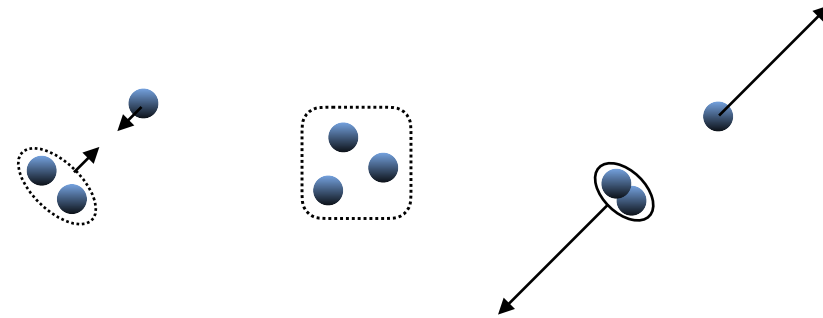


FIGURE 13. Collision inélastique atome-dimère assistée par la formation intermédiaire d'un état d'Efimov du côté $a > 0$ de la résonance. L'état initial fait intervenir le dimère faiblement lié d'énergie $-\hbar^2/ma^2$ et l'état final contient un dimère fortement lié, non décrit dans le modèle du pseudo-potentiel. Le taux de ce processus est maximal pour $a = a_*^{(n)}$, quand l'énergie du dimère faiblement lié coïncide avec celle du trimère d'Efimov.

Les dimères sont formés par "magnéto-association", obtenue en traversant rapidement la résonance de Fano-Feshbach vers le côté $a > 0$. Le nombre de dimères peut ensuite décroître par simple basculement de spin d'un des atomes qui le composent, ce qui désintègre le dimère. Il peut également diminuer sous l'effet des collisions avec les atomes, ce qui constitue le processus intéressant, et qui conduit à l'évolution du nombre de dimères N_D en présence d'une densité d'atomes ρ_A selon la loi :

$$\frac{dN_D}{dt} = -\beta_{AD} \rho_A N_D. \quad (14)$$

Le taux β_{AD} qui décrit ce processus est tracé en figure 15, avec un ajustement selon la loi proposée par BRAATEN & HAMMER (2007b) [voir aussi BRAATEN & HAMMER (2009) et HELFRICH & HAMMER (2009)] :

$$\beta_{AD} = C \frac{\sinh(2\eta)}{\sin^2[s_0 \ln(a/a_*)] + \sinh^2(\eta)} \frac{\hbar a}{m} \quad (15)$$

La structure de ce terme est très voisine de celle proposée en (3) pour la recombinaison à trois corps ; c'est logique puisque ces deux termes décrivent

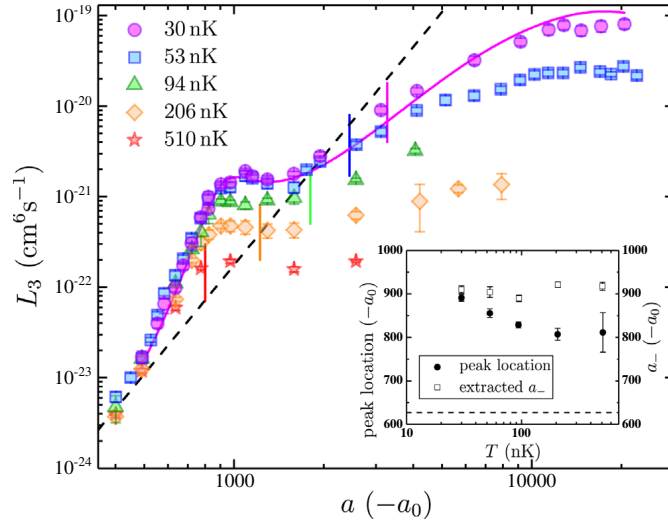


FIGURE 14. Taux de relaxation à trois corps dans un gaz de ^{39}K côté $a < 0$ pour la résonance de Fano-Feshbach située autour de $B = 33.6$ Gauss. On trouve $a_- = -908(11)a_0$. Figure extraite de CHAPURIN, XIE et al. (2019).

la même physique, avec la formation d'édifices fortement liés, non précisés dans le modèle et décrits par le paramètre η .

Le résultat de l'analyse de XIE, GRAAFF et al. (2020), extrapolé à température nulle, donne $a_*^{(1)} = 884(14)a_0$ et $\eta = 0.28(2)$. Les mêmes auteurs ont également mesuré le taux de recombinaison à trois corps L_3 (donc sans dimère) côté $a > 0$ et ont obtenu l'oscillation presque sinusoïdale (après division de L_3 par a^4) montrée en figure 16, comme attendu d'après (7). On en déduit la position du premier minimum $a_+^{(0)} = 246(6)a_0$ et du premier maximum $a_p^{(0)} = 876(28)a_0$.

Récapitulons l'ensemble des résultats obtenus par CHAPURIN, XIE et al. (2019) et XIE, GRAAFF et al. (2020) (en unité de a_0) :

$$a_+^{(0)} = 246 \quad a_p^{(0)} = 876 \quad a_*^{(1)} = 884 \quad a_-^{(0)} = -908 \quad (16)$$

Cet ensemble constitue un test remarquable de l'universalité d'Efimov

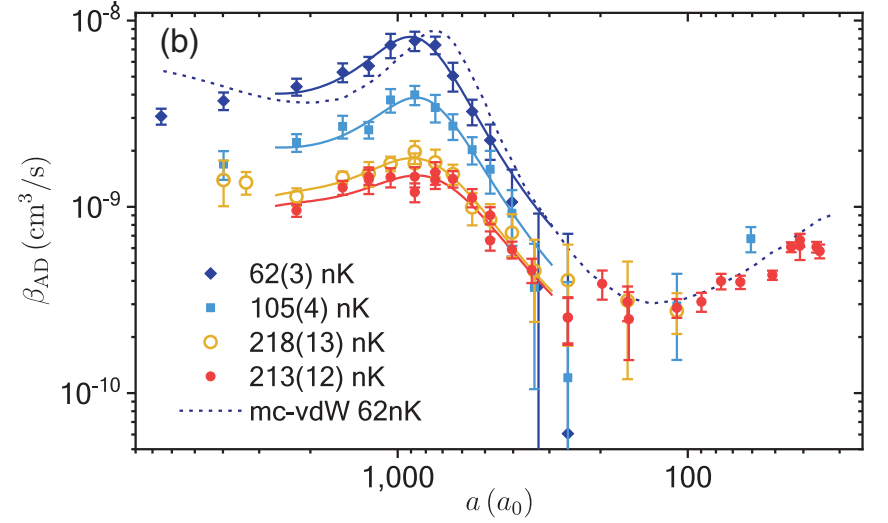


FIGURE 15. Taux de pertes à deux corps (atomes-dimères) au voisinage de $a_*^{(1)}$ dans un gaz de ^{39}K . Figure extraite de XIE, GRAAFF et al. (2020).

avec les différents rapports

$$\frac{a_*^{(1)}}{a_-^{(0)}} = \frac{884}{-908} = -0.97 \quad \text{Valeur attendue : } -1.065 \quad (17)$$

$$\frac{a_p^{(0)}}{a_-^{(0)}} = \frac{876}{-908} = -0.96 \quad \text{Valeur attendue : } -1 \quad (18)$$

$$\frac{a_p^{(0)}}{a_+^{(0)}} = \frac{876}{246} = 3.56 \quad \text{Valeur attendue : } 4.76 \quad (19)$$

Notons que pour la dernière équation, la valeur relativement petite de $a_+^{(0)}$ (comparée à la portée effective r_e) rend problématique l'atteinte de la valeur universelle, ce qui peut expliquer la déviation attendue.

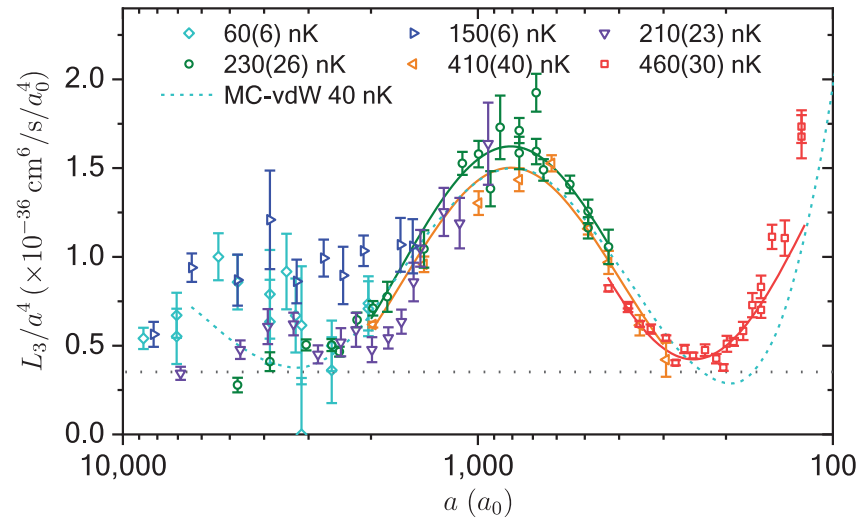


FIGURE 16. Taux de pertes à trois corps dans un gaz de ^{39}K côté $a > 0$. Figure extraite de XIE, GRAAFF *et al.* (2020).

3 Le paramètre à trois corps

3-1 Une coïncidence surprenante ?

Dans l'approche que nous avons présentée ici, basée sur une interaction de portée nulle, le paramètre à trois corps R_0 est un paramètre *ad hoc*, sans lien avec les autres quantités physiques du problème. On s'attendait initialement à ce qu'il en aille de même pour l'interaction de van der Waals qui est en jeu dans les gaz d'atomes froids. Ce fut donc une surprise quand, après avoir compilé les valeurs expérimentales de R_0 pour différentes résonances de Fano-Feshbach d'une espèce atomique donnée – le césium – (GROSS, SHOTAN *et al.* 2010; BERNINGER, ZENESINI *et al.* 2011) ainsi que pour différentes espèces atomiques, on a constaté que ces valeurs étaient étroitement liées à la longueur de van der Waals

$$R_{\text{vdW}} = \frac{1}{2} \left(\frac{mC_6}{\hbar^2} \right)^{1/4}. \quad (20)$$

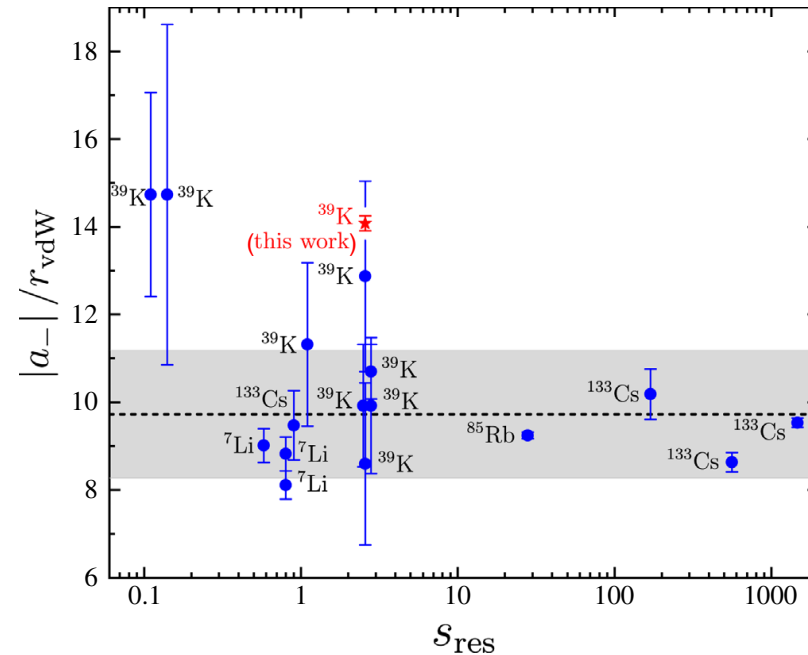


FIGURE 17. Valeurs du rapport $a_-^{(0)}/R_{\text{vdW}}$ pour le premier trimère d'Efimov pour différentes espèces atomiques, en fonction de la largeur s_{res} de la résonance de Fano-Feshbach. La zone grise correspond à $a_-^{(0)}/R_{\text{vdW}} = -9.7 \pm 1.5$. Figure extraite de CHAPURIN, XIE *et al.* (2019).

Par exemple, si on s'intéresse au pic $a_-^{(0)}$ du taux de recombinaison à trois corps du côté $a < 0$ de la résonance, on constate que la position de ce pic semble "verrouillée" autour de $-10 R_{\text{vdW}}$ avec quelques exceptions notamment du côté des résonances de Fano-Feshbach très étroites (voir la figure 17 pour plus de détails).

Pour éclaircir la situation sur le plan théorique, WANG, D'INCAO *et al.* (2012) ont étudié le comportement de ce rapport $a_-^{(0)}/R_{\text{vdW}}$ pour différents potentiels à deux corps en variant à chaque fois le nombre d'états liés dans ces potentiels [voir aussi MESTROM, WANG *et al.* (2017)]. Leurs résultats

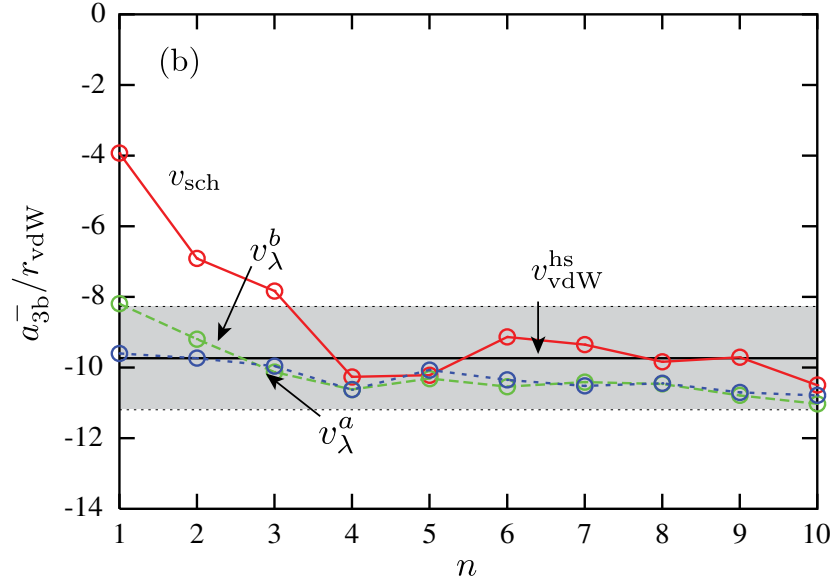


FIGURE 18. Valeurs du rapport $a_{3b}^{(0)}/R_{vdW}$ pour le premier trimère d'Efimov calculé pour différents potentiels d'interaction à deux corps. Figure extraite de WANG, D'INCAO et al. (2012).

sont indiqués en figure 18; ils ont été obtenus pour :

$$V_{\lambda}^a(r) = -\frac{C_6}{r^6} + \frac{C_{12}}{r^{12}} \quad C_{12} \equiv \lambda^6 C_6 \quad (21)$$

$$V_{\lambda}^b(r) = -\frac{C_6}{r^6} \exp(-\lambda^6/r^6) \quad (22)$$

$$V_{vdW}^{hs}(r) = B_{hs}\Theta(r_{hs} - r) - \frac{C_6}{r^6}\Theta(r - r_{hs}) \quad (23)$$

Ces potentiels ont tous un comportement en r^{-6} à grande distance⁴ et conduisent au "tir groupé" observé expérimentalement $a_{-}^{(0)} \sim -10 R_{vdW}$. Le quatrième potentiel utilisé en figure 18, $V_{sch}(r)$, décroît exponentiellement vite à l'infini et nous ne le discuterons pas ici.

4. Pour le potentiel de van der Waals avec cœur dur $V_{vdW}^{hs}(r)$ ("hs"=hard sphere), les paramètres sont ajustés pour travailler au seuil d'apparition du premier état lié.

Le lien trouvé entre le paramètre à trois corps et R_{vdW} n'est donc pas fortuit : on le retrouve théoriquement et il s'agit maintenant de comprendre son origine physique.

3-2 L'approche hypersphérique

Pour comprendre l'origine de ce lien entre paramètre à trois corps et R_{vdW} , nous allons revenir sur la démarche décrite au chapitre précédent pour traiter le problème à trois corps. Une fois le passage dans le référentiel du centre de masse effectué, le problème est décrit par 6 variables, l'hyperrayon R avec

$$R^2 = \frac{2}{3} (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2) \quad (24)$$

et 5 angles :

- les 2 angles α (Delves) et β (Jacobi) qui déterminent la forme du triangle (à une homothétie près),
- les 3 angles d'Euler qui déterminent l'orientation du triangle dans l'espace.

Dans ce qui suit, nous noterons Ω le quintuplet formé par ces cinq angles, une configuration donnée du triangle dans le référentiel du laboratoire étant donc définie par (R, Ω) .

L'approche hypersphérique prend pour point de départ l'équation de Schrödinger mise sous la forme (D'INCAO, GREENE et al. 2009) :

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \hat{H}_{ang}(\Omega; R) \right] \Phi(R, \Omega) = \mathcal{E} \Phi(R, \Omega) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = \frac{mE}{\hbar^2} \quad (25)$$

où l'opérateur $\hat{H}_{ang}(\Omega; R)$ fait intervenir des dérivées par rapport aux cinq angles de Ω (opérateur de moment cinétique généralisé), et contient également les potentiels d'interaction entre les trois particules. L'hyperrayon R joue le rôle de paramètre dans $\hat{H}_{ang}(\Omega; R)$: cet opérateur est local en R et ne contient pas de dérivées par rapport à R .

On commence par résoudre le problème aux valeurs propres pour l'hyperrangle Ω à R fixé et on trouve ainsi une série de fonctions propres et de

valeurs propres paramétrées par R :

$$\hat{H}_{\text{ang}}(\mathbf{\Omega}; R)F_i(\mathbf{\Omega}; R) = \epsilon_i(R) F_i(\mathbf{\Omega}; R), \quad (26)$$

Pour tout R , ces fonctions F_i forment une base orthonormée des fonctions de $\mathbf{\Omega}$ avec

$$\langle F_i(R)|F_j(R)\rangle = \int F_i^*(\mathbf{\Omega}; R) F_j(\mathbf{\Omega}; R) d^5\Omega = \delta_{i,j}. \quad (27)$$

Une fois cette première étape effectuée, on cherche la solution de l'équation initiale (25) sous la forme générale :

$$\Phi(R, \mathbf{\Omega}) = \sum_j \phi_j(R) F_j(\mathbf{\Omega}; R), \quad (28)$$

où les fonctions $\phi_i(R)$ sont à ce stade inconnues. Pour les déterminer, on injecte cette forme dans (25) et on projette le résultat sur un ϕ_i particulier pour trouver :

$$-\frac{d^2\phi_i}{dR^2} + \epsilon_i(R)\phi_i(R) + [\dots] = \mathcal{E}\phi_i(R). \quad (29)$$

Dans cette expression, le terme $[\dots]$ apparaît du fait de la dépendance en R des fonctions $F_j(\mathbf{\Omega}; R)$; on trouve plus précisément, avec la notation utilisée en (27) :

$$[\dots] = -2 \sum_j \frac{d\phi_j}{dR} \langle F_i|\partial_R F_j\rangle - \sum_j \phi_j(R) \langle F_i|\partial_R^2 F_j\rangle \quad (30)$$

L'approche la plus simple consiste à négliger complètement le terme $[\dots]$. Cela correspond à l'approximation de Born–Oppenheimer en physique moléculaire et c'est également ce que nous avons présenté au chapitre 5, §4.1 : le potentiel hypersphérique que nous avons alors introduit, $[s_i^2(R) - 1/4]/R^2$, n'était autre que le terme $\epsilon_i(R)$ qui apparaît dans (29).

A l'inverse, si on garde le système infini d'équations couplées pour les ϕ_j , on a une description exacte du problème. En pratique, elle sera d'autant meilleure que la troncature de ce système se fera pour un indice j élevé.

Une solution intermédiaire qui va nous guider ici consiste à ne garder qu'une seule fonction inconnue ϕ_i tout en prenant en compte les corrections provenant de la dépendance en R de $F_i(\mathbf{\Omega}; R)$ dans (30). Après un

calcul relativement simple [voir par exemple DALIBARD, GERBIER et al. (2011) ou le cours 2013-14, chap.3, §4], on arrive à la forme simple suivante pour l'équation vérifiée par ψ_i :

$$\left\{ \left[-i \frac{d}{dR} - \mathcal{A}_i(R) \right]^2 + \epsilon_i(R) + \mathcal{V}_i(R) \right\} \phi_i(R) = \mathcal{E} \phi_i(R) \quad (31)$$

où l'on a fait apparaître deux potentiels géométriques \mathcal{A}_i et \mathcal{V}_i :

$$\mathcal{A}_i(R) = i \langle F_i(R)|\partial_R F_i(R)\rangle \quad \mathcal{V}_i(R) = \sum_{j \neq i} |\langle \partial_R F_i(R)|F_j(R)\rangle|^2 \quad (32)$$

Si la variable R évoluait dans un espace de dimension supérieure à 1, le potentiel \mathcal{A}_i serait un "potentiel vecteur" et décrirait une possible phase de Berry. Pour le problème qui nous intéresse ici, où la variable R est unidimensionnelle, \mathcal{A}_i ne joue pas de rôle significatif et peut d'ailleurs être éliminé par un changement de jauge pour la fonction ϕ_i , en posant $\tilde{\phi}_i(R) = \phi_i(R)e^{-i\chi(R)}$ avec $\chi(R) = \int_0^R \mathcal{A}_i(R') dR'$. En revanche, le "potentiel scalaire" $\mathcal{V}_i(R)$ va jouer un rôle important. Notons tout de suite qu'il est toujours positif et d'autant plus grand que l'état angulaire $|\phi_i(R)\rangle$ varie vite avec R .

3-3 Emergence d'un cœur dur en $\sim 2R_{\text{vdW}}$

Pour apprécier de manière quantitative le rôle du potentiel géométrique défini au paragraphe précédent, il est intéressant d'examiner les résultats de WANG, D'INCAO et al. (2012) déjà cités, ainsi que ceux de NAIDON, ENDO et al. (2014) [avec leur erratum NAIDON, ENDO et al. (2021)]. Ces auteurs ont considéré deux types de potentiels à deux corps

$$V_{\text{soft}}(r) = -\frac{C_6}{r^6 + \sigma^6} \quad \text{et} \quad V_{\text{LJ}}(r) = -\frac{C_6}{r^6} + \frac{C_{12}}{r^{12}}. \quad (33)$$

Pour C_6 fixé, ils ont fait varier le nombre d'états liés en changeant σ ou C_{12} , puis calculé le potentiel total résultant $W_i(R) = \epsilon_i(R) + \mathcal{V}_i(R)$ pour le canal de plus basse énergie $i = 0$. Le calcul a été fait à dans le cas unitaire ($a = \infty$) pour lequel le potentiel adiabatique $\epsilon_0(R)$ est égal à $-(|s_0|^2 + 1/4)/R^2$ si la portée du potentiel à deux corps peut être négligée.

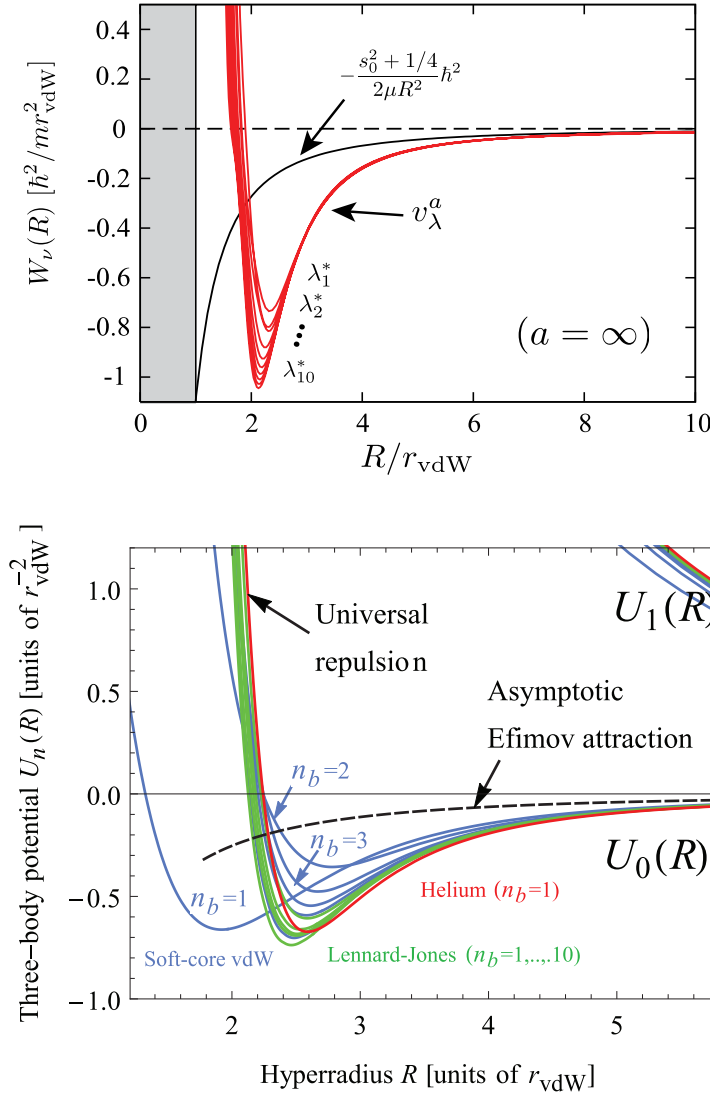


FIGURE 19. Potentiel total $W_i(R) = \epsilon_i(R) + \mathcal{V}_i(R)$ pour le canal $i = 0$. Le calcul est fait à l'unitarité, c'est-à-dire pour $a = \infty$. Figures extraites de WANG, D'INCAO et al. (2012) (haut) et NAIDON, ENDO et al. (2014) (bas).

Le résultat tracé sur la figure 19 est frappant. Dès que le nombre d'états liés dépasse 3, la forme de $W_i(R)$ devient quasiment indépendante de ce nombre d'états liés et donc de la profondeur du potentiel à deux corps $V(r)$ originel. Plus précisément :

- Pour $R \gtrsim 10R_{\text{vdW}}$, on retrouve le potentiel d'Efimov déterminé au chapitre précédent pour une portée nulle, $-(|s_0|^2 + 1/4)/R^2$.
- Pour $2R_{\text{vdW}} \gtrsim R \gtrsim 10R_{\text{vdW}}$, le potentiel $W_i(R)$ est significativement plus profond que le potentiel d'Efimov pour une portée nulle.
- Pour $R \approx 2R_{\text{vdW}}$, un cœur dur émerge et cela même si le potentiel à deux corps de départ $V(r)$ est strictement monotone, comme c'est le cas pour $V_{\text{soft}}(r)$.

Il ne reste plus qu'à comprendre pourquoi le potentiel $W_0(R)$ fait apparaître ce quasi cœur dur à courte distance. L'explication de WANG, D'INCAO et al. (2012) et NAIDON, ENDO et al. (2014) repose sur la forme optimale du trimère en fonction de l'hyperrayon R :

- Quand $R \gg R_{\text{vdW}}$, la forme optimale est la même que pour un potentiel de portée nulle : c'est un triangle allongé avec deux particules proches l'une de l'autre et la troisième beaucoup plus loin.
- Quand l'hyperrayon devient de l'ordre de quelques R_{vdW} , la forme optimale du triangle est plus proche d'un triangle équilatéral. En effet, la forme allongée impliquerait d'avoir deux particules à une distance $\ll R_{\text{vdW}}$, ce qui est peu probable quand on regarde la solution du problème à deux corps indiquée sur la figure 20 [voir également le cours 2021, chapitre 4, §4].

La forme du triangle varie donc rapidement au voisinage $R \sim 2R_{\text{vdW}}$, ce qui crée un potentiel géométrique scalaire $\mathcal{V}_0(R)$ important [cf. (32)].

Notons que cette explication repose sur une analyse d'un potentiel binaire à un canal. Dans les expériences menées sur les gaz d'atomes froids, on utilise des résonances de Fano-Feshbach pour approcher la situation $a = \infty$ et les paramètres de la résonance, comme sa largeur et la longueur d'onde de fond (*background scattering length*), peuvent jouer un rôle significatif. On pourra consulter SCHMIDT, RATH et al. (2012), WANG & JULIENNE (2014) et LANGMACK, SCHMIDT et al. (2018) pour un traitement détaillé dans ce cas.

Le cas des résonances de Feshbach étroites est particulier du fait de la portée effective $\gg R_{\text{vdW}}$ qui apparaît dans le problème (PETROV 2004). Le

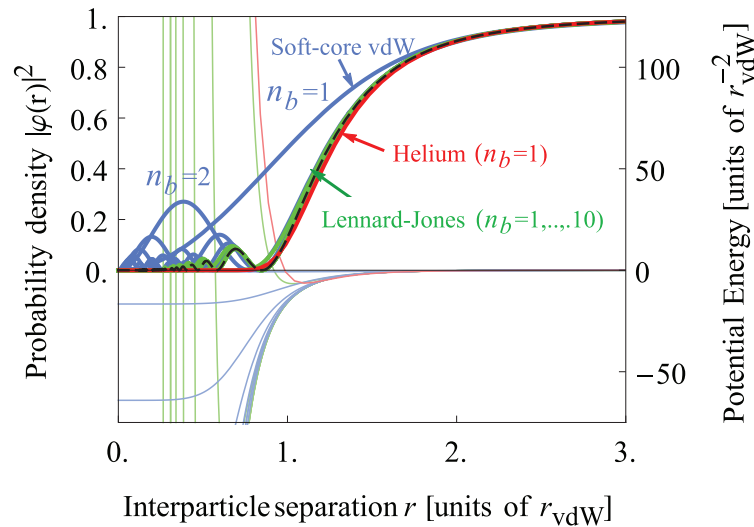


FIGURE 20. Densité de probabilité pour la fonction d'onde à deux corps d'énergie nulle pour les différents potentiels donnés en (33). Dès qu'il y a plusieurs états liés pour ces potentiels, la probabilité pour trouver les deux atomes à une distance inférieure à R_{vdW} devient très faible. Les lignes en traits fins indiquent les potentiels utilisés pour le calcul. Le calcul est fait pour $a = \infty$. Figure extraite de NAIDON, ENDO et al. (2014).

recours à un paramètre à trois corps pour régulariser la situation n'est alors plus nécessaire et GOGOLIN, MORA et al. (2008) ont pu fournir une solution analytique au problème à trois corps dans ce cas [voir aussi CASTIN & TIGNONE (2011), ENDO & CASTIN (2016), SECKER, AHMED-BRAUN et al. (2021) et KRAATS, AHMED-BRAUN et al. (2022) et refs. in]. Plusieurs expériences récentes ont été menées dans ce régime, parmi lesquelles JOHANSEN, DESALVO et al. (2017), YUDKIN, ELBAZ et al. (2019), XIE, GRAAFF et al. (2020), LI, YUDKIN et al. (2022) et ETRYCH, MARTIROSYAN et al. (2022).

4 Au delà de l'effet Efimov standard

Le travail original d'EFIMOV (1970) portait sur trois bosons identiques en interaction résonante et c'est sur ce cas que nous nous sommes concentrés dans ces deux derniers chapitres. Pour conclure cette présentation, nous allons maintenant passer en revue quelques situations différentes, par la nature statistique ou par le nombre de particules en jeu. Compte tenu de la place impartie, notre discussion sera forcément parcellaire et nous renvoyons les lecteurs intéressés vers NAIDON & ENDO (2017) qui présentent en détail de nombreux prolongements au problème d'Efimov.

4-1 Trois fermions identiques

Commençons par le cas simple où l'on remplace les trois bosons identiques de l'effet Efimov par trois fermions polarisés. Il n'y a alors plus d'interaction binaire en onde s et il faut se tourner vers les interactions binaires en onde p ($\ell = 1$) pour lesquelles l'amplitude de diffusion $f_1(k)$ s'écrit [voir le cours 2020-21, chap. 3, §2.3] :

$$\frac{1}{f_1(k)} \approx -\frac{1}{k^2 v} + \frac{k_e}{2} - ik, \quad (34)$$

où v est le volume de diffusion et k_e un terme de portée effective (toujours négatif au voisinage de la résonance). La transposition de $|a| = \infty$ pour une résonance en onde s correspond alors à un volume de diffusion v infini. Un état faiblement lié du dimère apparaît du côté $v > 0$ de la résonance.

Ce problème a été étudié par JONA-LASINIO, PRICOUPENKO et al. (2008) [voir aussi LEVINSSEN, COOPER et al. (2008) et BRAATEN, HAGEN et al. (2012)]. Ces auteurs ont montré que pour le canal de moment cinétique 1, il pouvait exister deux trimères liés, un de chaque parité, pour v choisi suffisamment proche de la résonance $v = \infty$. Ces trimères peuvent être de nature borroméenne, c'est-à-dire exister pour des valeurs grandes et négatives du volume de diffusion, pour lesquelles il n'y a pas d'état faiblement lié à deux corps. La position de ces trimères est universelle dans la mesure où elle ne dépend que des paramètres du problème à deux corps, en l'occurrence les valeurs de v , k_e et de la portée b du potentiel (figure 21).

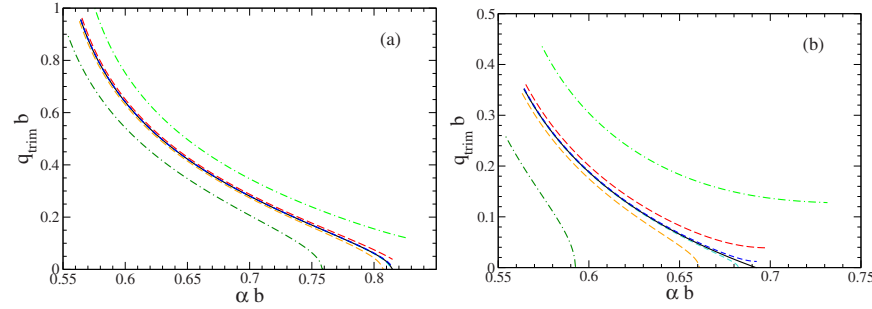


FIGURE 21. Nombre d'onde q définissant l'énergie du trimère $-\hbar^2 q^2/m$ formé à partir de trois fermions identiques. La portée effective est notée ici $\alpha \equiv -k_e/2$. Le paramètre b désigne la portée du potentiel, obtenu ici par une modélisation d'une résonance de Fano–Feshbach avec un couplage gaussien entre le canal ouvert et le canal fermé. Figure de gauche (resp. droite) : parité positive (resp. négative). Ligne noire continue : $v = \infty$. ligne tiretée bleue : $v = \pm 10^4 b^3$, ligne tiretée rouge/orange : $v = \pm 10^3 b^3$, ligne tiretée verte : $v = \pm 10^2 b^3$. Figures extraites de JONA-LASINIO, PRICOUPEENKO *et al.* (2008).

Il n'y a donc pas d'effet Efimov dans ce cas, c'est-à-dire pas d'émergence d'une série infinie d'états liés à trois corps au seuil de formation du dimère. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire d'introduire un paramètre à trois corps pour décrire l'énergie des deux trimères universels mentionnés ci-dessus. Ce problème a été repris récemment par CHEN & GREENE (2022), qui ont confirmé les conclusions de JONA-LASINIO, PRICOUPEENKO *et al.* (2008) pour des potentiels de type Lennard-Jones $-r^{-6} + r^{-12}$.

4-2 Trois particules discernables

Quand on considère trois particules discernables, la fonction d'onde n'a pas à être symétrisée ou antisymétrisée, ce qui relâche une contrainte présente pour des particules indiscernables. Pour une même force des interactions, l'énergie de l'état fondamental du système à trois particules discernables est donc forcément inférieure ou égale à celle calculée pour des bosons ou des fermions.

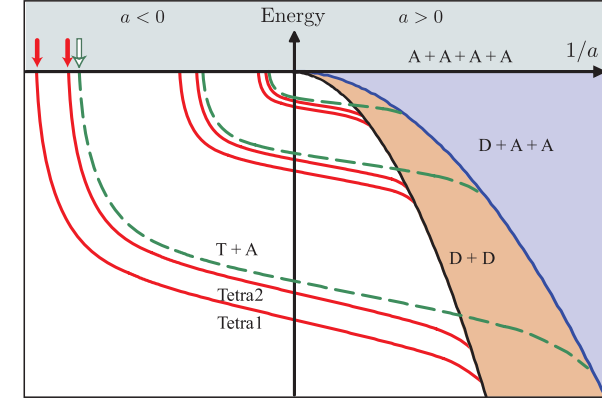


FIGURE 22. Les deux branches de tétramères universels attachées à chaque branche de trimère d'Efimov. Figure extraite de FERLAINO, KNOOP *et al.* (2009).

Si les trois interactions en onde s sont résonantes ($|a_{ij}| = \infty$) et les trois masses égales, on retrouve en fait le même résultat que pour trois bosons identiques du fait de la symétrie du système. On a en particulier le paramètre d'échelle $\lambda = e^{\pi/|s_0|} \approx 22.7$ avec $|s_0| = 1.00624$.

Si deux interactions sont résonantes et la troisième nulle, par exemple $|a_{12}| = |a_{13}| = +\infty$ et $a_{23} = 0$, on retrouve formellement le cas mMM étudié aux chapitres 3 et 4. Si la relation $m \ll M$ n'est pas vérifiée, l'approche de Born–Oppenheimer n'est plus valable mais un traitement similaire à celui adopté dans le chapitre 5 reste possible. On retrouve alors un effet Efimov, avec un paramètre d'échelle $\lambda = e^{\pi/|s_0|} \approx 2000$ avec $|s_0| = 0.414$ (NAIDON & ENDO 2017). La très grande valeur de ce paramètre λ rend difficile toute vérification expérimentale.

4-3 Quatre bosons identiques

Nous continuons notre discussion par le cas de quatre bosons identiques, de spin nul ou polarisés. Là aussi, la première question qui se pose est celle d'un véritable effet Efimov à quatre corps, c'est-à-dire l'existence d'une infinité d'états liés de tétramères au seuil d'apparition $a_-^{(0)}$ du pre-

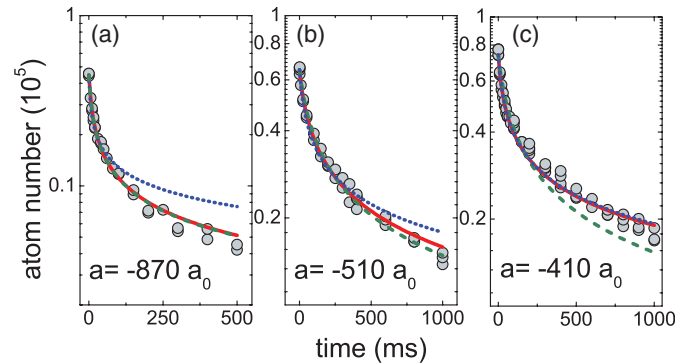


FIGURE 23. Décroissance du nombre d'atomes de césium au voisinage du seuil d'apparition du premier trimère d'Efimov. Ligne tiretée (pointillée) : pertes à trois (quatre) corps uniquement. Ligne continue : prédiction déduite de (36). Figure extraite de FERLAINO, KNOOP et al. (2009).

mier trimère d'Efimov, côté $a < 0$. Cette question a en fait été abordée très peu de temps après la publication d'Efimov par AMADO & GREENWOOD (1973) et la réponse est négative.

Ce résultat ne clôt malgré tout pas complètement la question. Sans qu'une série efimovienne de tétramères existe, il peut y avoir un ou quelques tétramères attachés à chaque trimère d'Efimov. Il s'agit d'un édifice à quatre particules, d'énergie négative et inférieure à l'énergie du trimère. La prédiction de tels tétramères "universels" a été faite par HAMMER & PLATTER (2007), puis affinée par STECHER, D'INCAO et al. (2009). Il y a deux branches de tétramères attachées à chaque branche de trimères (figure 22). Ces tétramères sont qualifiés d'universels car une fois la position du trimère connue, leur énergie peut être calculée sans nécessiter l'introduction d'un paramètre à quatre corps⁵.

Ces tétramères ont une nature borroméenne, dans le sens qu'ils peuvent exister pour une longueur de diffusion inférieure en valeur absolue à la longueur de diffusion $a_-^{(n)}$ (négative) pour laquelle le trimère apparaît. La

5. Cette affirmation nécessite quelques précautions pour le trimère fondamental, car les tétramères correspondants ont une taille plus petite que lui et peuvent donc être sensibles à la physique à courte portée [voir NAIDON & ENDO (2017)].

prédiction de STECHER, D'INCAO et al. (2009) est

$$a_{4b1}^{(0)} = 0.43 a_-^{(0)} \quad a_{4b2}^{(0)} = 0.90 a_-^{(0)} \quad (35)$$

L'existence de ces tétramères a été confirmée par FERLAINO, KNOOP et al. (2009) dans une expérience qui tire précisément parti de cette nature borroméenne. Les chercheurs d'Innsbruck ont étudié les pertes d'atomes dans un piège de césium au voisinage du seuil d'apparition $a_-^{(0)} = -870 a_0$ du trimère. Ils ont observés deux valeurs de a pour lesquelles les pertes s'expliquaient par la somme d'une loi à trois corps et d'une loi à quatre corps (figure 23) :

$$\frac{\dot{N}}{N} = -L_3 \rho^2 - L_4 \rho^3 \quad (36)$$

Les valeurs trouvées pour $a_{4b1}^{(0)}$ et $a_{4b2}^{(0)}$ sont en bon accord avec la prédiction (35) [coefficients mesurés : 0.47 et 0.84].

4-4 N_f fermions identiques et une autre particule

Le système $mMMM$, c'est-à-dire $N_f = 3$ fermions identiques et une autre particule, ainsi que sa généralisation à $N_f = 4$, sont les seuls systèmes connus⁶ qui présentent un véritable effet Efimov. Le cas $N_f = 3$ a été étudié par CASTIN, MORA et al. (2010) et le cas $N_f = 4$ par BAZAK & PETROV 2017.

La question que nous abordons dans ce paragraphe peut se formuler de la manière suivante : combien de fermions polarisés de masse M peuvent être liés par interaction avec une unique particule légère de masse $m \ll M$? Pour commencer, rappelons le résultat important obtenu aux chapitres 3 et 4 pour le cas $N_f = 2$. Nous avons considéré le système à trois corps mMM pour une interaction de portée nulle avec $|a| = +\infty$ et indiqué que (KARTAVTSEV & MALYKH 2007) :

- un effet Efimov peut se produire quand $M/m > 13.607$;
- pour $8.173 < M/m < 13.607$, il existe côté $a > 0$ un (ou deux) trimères "universels", dont l'énergie ne dépend pas d'un paramètre à trois corps.

6. En particulier, le système $mMMM$ avec M bosonique ne présente pas cette propriété (ADHIKARI & FONSECA 1981). Il en va de même pour le système à quatre fermions $mmMM$ (ENDO & CASTIN 2015).

Pour étudier le problème $mMMM$, donc avec un fermion M supplémentaire, CASTIN, MORA et al. (2010) se sont placés eux aussi à l'unitarité pour une interaction binaire mM de portée nulle. Les interactions MM entre deux fermions identiques sont supposées négligeables (il ne pourrait s'agir que d'interactions en ondes impaires, *a priori* faibles à basse température). On considère donc l'hamiltonien purement cinétique

$$\hat{H} = - \sum_{i=1}^4 \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 \quad (37)$$

avec les conditions aux limites de Bethe-Peierls aux points où la particule légère m vient au contact d'un des fermions M . La question est de savoir si cet hamiltonien admet des états d'énergie négative dans lesquels les trois particules lourdes sont liées ensemble par la particule légère.

Comme pour le problème à trois corps, il est utile pour un problème à N corps (avec ici $N = N_f + 1$) d'isoler d'abord les 3 variables du centre de masse (que l'on prendra au repos dans ce qui suit), puis de séparer les $d = 3N - 3$ variables restantes en

- une variable R , l'hyperrayon, donnant l'échelle de longueur du problème;
- $d - 1 = 3N - 4$ hyperangles, notés collectivement Ω , définissant l'arrangement spatial des N corps (à une homothétie près) et l'orientation de cet arrangement dans l'espace.

L'expression générale de l'opérateur énergie cinétique en dimension d peut s'écrire en fonction de ces variables (voir par exemple GREENE, GIANNAKEAS et al. (2017)) :

$$\hat{H} = \hat{T}_R + \frac{\hbar^2}{2m_r R^2} \hat{\Lambda}_\Omega^2 \quad (38)$$

où l'opérateur énergie cinétique radiale est :

$$\hat{T}_R = - \frac{\hbar^2}{2m_r} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{d-1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \quad (39)$$

et où $\hat{\Lambda}_\Omega$ est l'opérateur "grand moment cinétique" pour le système de dimension d . Cet opérateur fait intervenir les hyperangles et les dérivées

d'ordre 1 et 2 par rapport à ces angles⁷, mais pas l'hyperrayon R .

Notons que la définition précise du couple "hyperrayon – masse réduite" varie selon les auteurs par des facteurs numériques d'ordre unité. Dans ce qui suit, nous ne rentrerons pas dans des calculs quantitatifs et nous n'aurons donc pas besoin de spécifier ce choix. On pourra consulter par exemple GREENE, GIANNAKEAS et al. (2017) pour une construction explicite des hyperangles, de l'hyperrayon et de la masse réduite associée.

En règle générale, quand a n'est pas infinie ou nulle, les conditions aux limites de Bethe-Peierls couplent hyperrayon et hyperangles, ce qui rend le problème particulièrement complexe. Dans le cas $|a| = +\infty$ (ou dans le cas sans interaction $a = 0$), les conditions aux limites de Bethe-Peierls ne font intervenir que les hyperangles. C'est une signature de l'invariance d'échelle du système déjà mentionnée plusieurs fois dans les chapitres précédents : il n'y a aucune échelle de longueur à mettre en rapport avec R pour obtenir une équation sans dimension. C'est ainsi que pour le problème à trois corps, nous avons abouti au chapitre 5 à l'équation traduisant ces conditions aux limites pour la partie angulaire $F(\alpha)$ de la fonction d'onde :

$$|a| = +\infty : \quad \left[\frac{dF}{d\alpha} \right]_{\alpha \rightarrow 0} + \frac{8}{\sqrt{3}} F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0. \quad (41)$$

Le traitement de CASTIN, MORA et al. (2010) part donc du fait que l'on peut chercher alors les états propres de \hat{H} sous une forme factorisée :

$$\Phi(R, \Omega) = \frac{\phi(R)}{R^{(d-1)/2}} F(\Omega) \quad \text{avec pour } N = 4 : \quad \frac{d-1}{2} = 4. \quad (42)$$

Il faut dans un premier temps résoudre le problème aux valeurs propres pour la partie angulaire $F(\Omega)$ en prenant en compte les conditions aux limites de Bethe-Peierls :

$$\hat{\Lambda}_\Omega^2 F(\Omega) = \lambda F(\Omega). \quad (43)$$

⁷ Par exemple, en dimension $d = 3$, on a l'expression bien connue en fonction de l'angle polaire θ et l'angle azimuthal φ :

$$\hat{\Lambda}^2 = \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2} = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (40)$$

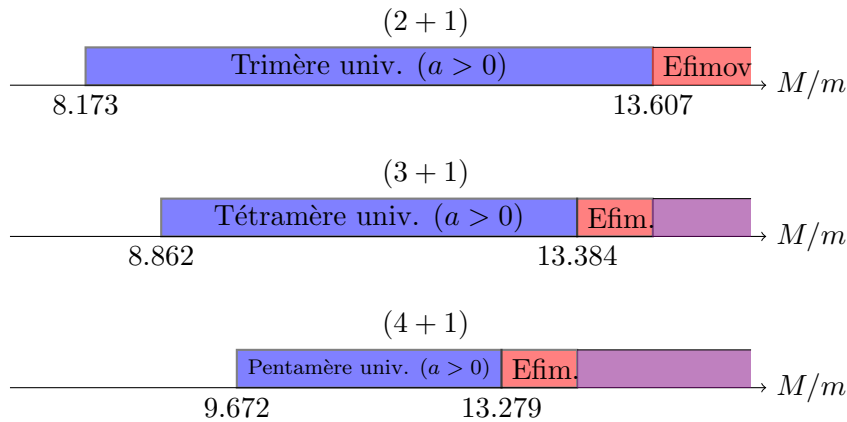


FIGURE 24. Les états liés possibles de N_f fermions de masse M en interaction binaire résonante avec une particule de masse m ($N_f = 2, 3, 4$). Ces données sont extraites de KARTAVTSEV & MALYKH (2007), CASTIN, MORA *et al.* (2010), BAZAK & PETROV (2017) et BAZAK (2020). L'échelle de l'axe M/m n'est pas linéaire. Il n'y a pas d'effet Efimov pour $N_f = 5$ ou 6 (BAZAK 2020).

Une fois cette étape (délicate !) franchie, l'équation radiale s'écrit simplement

$$-\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{s^2 - 1/4}{R^2}\phi(R) = \epsilon\phi(R) \quad (44)$$

où [cf. Eq. (C-13) de WERNER & CASTIN (2006)]

$$s^2 = \lambda + \frac{1}{4}(d-2)^2 \quad (45)$$

est un nombre dépendant de M/m , mais indépendant de R , et où on a posé $\epsilon = 2m_r E/\hbar^2$.

Nous nous retrouvons alors en terrain familier : si des valeurs négatives de s^2 sont possibles, un effet Efimov apparaîtra. Le résultat de CASTIN, MORA *et al.* (2010) pour $N = N_f + 1 = 4$ est qu'effectivement, cet effet

peut se produire quand

$$13.384 < \frac{M}{m} \quad (46)$$

Cette condition est (légèrement) moins contraignante que celle trouvée pour le problème mMM . Il existe donc un intervalle de valeurs de M/m , $[13.384, 13.607]$, sur lequel le problème à quatre corps est Efimovien alors que celui à trois corps ne l'est pas (voir la figure 24). Pour $M/m > 13.607$, il est difficile d'énoncer des résultats généraux sur le problème $(3+1)$ dans la mesure où la résolution du problème Efimovien $(2+1)$ nécessite l'introduction d'un paramètre à trois corps non universel. Nous avons représenté cette zone en violet sur la figure 24.

On peut également chercher un tétramère universel pour des valeurs de M/m plus faibles, similaire au(x) trimère(s) universel(s) de KARTAVTSEV & MALYKH (2007). Un tel tétramère existe effectivement sur l'intervalle $[8.862, 13.384]$ (BLUME 2012; BAZAK 2020).

Comme nous l'avons annoncé en introduction de ce paragraphe, le problème $(4+1)$, c'est-à-dire $N_f = 4$ fermions de masse m et une particule lourde de masse M , conduit lui aussi à une effet Efimov original avec la formation de pentamères, dans un (petit) domaine de valeurs de M/m pour lequel il n'y a pas de trimères d'Efimov, ni de tétramères d'Efimov (BAZAK & PETROV 2017). En revanche, on peut montrer qu'il n'existe pas d'états d'Efimov pour les systèmes $(5+1)$ et $(6+1)$ (BAZAK 2020). Ces résultats sont eux aussi résumés sur la figure 24.

Références

- ADHIKARI, Sadhan K. & António C. FONSECA (1981), « Four-body Efimov effect in a Born-Oppenheimer model », in *Phys. Rev. D* **24**, p. 416-425.
- AMADO, RD & FC GREENWOOD (1973), « There is no Efimov effect for four or more particles », in *Physical Review D* **7**, p. 2517.
- BAZAK, Betzalel (2020), « Efimov physics beyond three particles », in *International Conference on Few-Body Problems in Physics*, Springer, , p. 885-894.
- BAZAK, Betzalel & Dmitry S PETROV (2017), « Five-body Efimov effect and universal pentamer in fermionic mixtures », in *Physical Review Letters* **118**, p. 083002.
- BEDAQUE, Paulo F, Eric BRAATEN & H-W HAMMER (2000), « Three-body recombination in Bose gases with large scattering length », in *Physical Review Letters* **85**, p. 908.
- BERNINGER, M, A ZENESINI, B HUANG, W HARM, H-C NÄGERL, F FERLAINO, R GRIMM, PS JULIENNE & JM HUTSON (2011), « Universality of the three-body parameter for Efimov states in ultracold cesium », in *Physical Review Letters* **107**, p. 120401.
- BLUME, D (2012), « Universal four-body states in heavy-light mixtures with a positive scattering length », in *Physical Review Letters* **109**, p. 230404.
- BRAATEN, Eric, P HAGEN, H-W HAMMER & Lucas PLATTER (2012), « Renormalization in the three-body problem with resonant p-wave interactions », in *Physical Review A* **86**, p. 012711.
- BRAATEN, Eric & H-W HAMMER (2004), « Enhanced dimer relaxation in an atomic and molecular Bose-Einstein condensate », in *Physical Review A* **70**, p. 042706.
- BRAATEN, Eric & H.-W. HAMMER (2006), « Universality in few-body systems with large scattering length », in *Physics Reports* **428**, p. 259-390.
- BRAATEN, Eric & H-W HAMMER (2007a), « Efimov physics in cold atoms », in *Annals of Physics* **322**, p. 120-163.
- (2007b), « Resonant dimer relaxation in cold atoms with a large scattering length », in *Physical Review A* **75**, p. 052710.
- (2009), « Erratum : Resonant dimer relaxation in cold atoms with a large scattering length [Phys. Rev. A 75, 052710 (2007)] », in *Physical Review A* **79**, p. 039905.
- BRUCH, Ludwig W. & Katurō SAWADA (1973), « Inequality Relating the Ground-State Energies of Two and Three Bosons », in *Phys. Rev. Lett.* **30**, p. 25-27.
- CASTIN, Yvan, Christophe MORA & Ludovic PRICOUPENKO (2010), « Four-Body Efimov Effect for Three Fermions and a Lighter Particle », in *Physical Review Letters* **105**, p. 223201.
- CASTIN, Yvan & Edoardo TIGNONE (2011), « Trimers in the resonant (2+1)-fermion problem on a narrow Feshbach resonance : Crossover from Efimovian to hydrogenoid spectrum », in *Physical Review A* **84**, p. 062704.
- CHAPURIN, Roman, Xin XIE, Michael J. Van de GRAAFF, Jared S. POPOWSKI, Jose P. D'INCAO, Paul S. JULIENNE, Jun YE & Eric A. CORNELL (2019), « Precision Test of the Limits to Universality in Few-Body Physics », in *Physical Review Letters* **123**, p. 233402.
- CHEN, Yu-Hsin & Chris H GREENE (2022), « Efimov physics implications at p-wave fermionic unitarity », in *Physical Review A* **105**, p. 013308.
- DALIBARD, Jean, Fabrice GERBIER, Gediminas JUZELIUNAS & Patrik ÖHBERG (2011), « Colloquium : Artificial gauge potentials for neutral atoms », in *Rev. Mod. Phys.* **83**, p. 1523-1543.
- D'INCAO, José P (2018), « Few-body physics in resonantly interacting ultracold quantum gases », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **51**, p. 043001.
- D'INCAO, José P, Chris H GREENE & BD ESRY (2009), « The short-range three-body phase and other issues impacting the observation of Efimov physics in ultracold quantum gases », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **42**, p. 044016.
- DYKE, P, SE POLLACK & RG HULET (2013), « Finite-range corrections near a Feshbach resonance and their role in the Efimov effect », in *Physical Review A* **88**, p. 023625.
- EFIMOV, V. (1970), « Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system », in *Physics Letters B* **33**, p. 563-564.
- EISMANN, Ulrich, Lev KHAYKOVICH, Sébastien LAURENT, Igor FERRIER-BARBUT, Benno S. REM et al. (2016), « Universal Loss Dynamics in a Unitary Bose Gas », in *Phys. Rev. X* **6**, p. 021025.
- ENDO, Shimpei & Yvan CASTIN (2015), « Absence of a four-body Efimov effect in the 2 + 2 fermionic problem », in *Physical Review A* **92**, p. 053624.
- (2016), « Unitary boson-boson and boson-fermion mixtures : third virial coefficient and three-body parameter on a narrow Feshbach resonance », in *The European Physical Journal D* **70**, p. 238.
- ESRY, B. D., Chris H. GREENE & James P. BURKE (1999a), « Recombination of Three Atoms in the Ultracold Limit », in *Physical Review Letters* **83**, p. 1751-1754.

- ESRY, B. D., Chris H. GREENE & James P. BURKE (1999b), « Recombination of Three Atoms in the Ultracold Limit », in *Physical Review Letters* **83**, p. 1751-1754.
- ETRYCH, Jiří, Gevorg MARTIROSYAN, Alec CAO, Jake AP GLIDDEN, Lena H DOGRA, Jeremy M HUTSON, Zoran HADZIBABIC & Christoph EIGEN (2022), « Pinpointing Feshbach Resonances and Testing Efimov Universalities in ^{39}K », in *arXiv preprint arXiv :2208.13766*.
- FEDICHEV, P. O., M. W. REYNOLDS & G. V. SHLYAPNIKOV (1996), « Three-Body Recombination of Ultracold Atoms to a Weakly Bound s Level », in *Physical Review Letters* **77**, p. 2921-2924.
- FERLAINO, F, S KNOOP, M BERNINGER, W HARM, JP D'INCAO, H-C NÄGERL & R GRIMM (2009), « Evidence for universal four-body states tied to an Efimov trimer », in *Physical Review Letters* **102**, p. 140401.
- FERLAINO, F, A ZENESINI, M BERNINGER, B HUANG, H-C NÄGERL & R GRIMM (2011), « Efimov resonances in ultracold quantum gases », in *Few-Body Systems* **51**, p. 113-133.
- GOGOLIN, Alexander O., Christophe MORA & Reinhold EGGER (2008), « Analytical Solution of the Bosonic Three-Body Problem », in *Physical Review Letters* **100**, p. 140404.
- GREENE, Chris H, P GIANNAKEAS & J PÉREZ-RÍOS (2017), « Universal few-body physics and cluster formation », in *Reviews of Modern Physics* **89**, p. 035006.
- GROSS, Noam, Zav SHOTAN, Servaas KOKKELMANS & Lev KHAYKOVICH (2009), « Observation of universality in ultracold Li 7 three-body recombination », in *Physical Review Letters* **103**, p. 163202.
- (2010), « Nuclear-spin-independent short-range three-body physics in ultracold atoms », in *Physical Review Letters* **105**, p. 103203.
- HAMMER, H-W & L PLATTER (2007), « Universal properties of the four-body system with large scattering length », in *The European Physical Journal A* **32**, p. 113-120.
- HELFRICH, Kerstin & H-W HAMMER (2009), « Resonant atom-dimer relaxation in ultracold atoms », in *EPL (Europhysics Letters)* **86**, p. 53003.
- HUANG, Bo, Leonid A. SIDORENKOV, Rudolf GRIMM & Jeremy M. HUTSON (2014), « Observation of the Second Triatomic Resonance in Efimov's Scenario », in *Physical Review Letters* **112**, p. 190401.
- JOHANSEN, Jacob, BJ DESALVO, Krutik PATEL & Cheng CHIN (2017), « Testing universality of Efimov physics across broad and narrow Feshbach resonances », in *Nature Physics* **13**, p. 731-735.
- JONA-LASINIO, M., L. PRICOUPENKO & Y. CASTIN (2008), « Three fully polarized fermions close to a p -wave Feshbach resonance », in *Physical Review A* **77**, p. 043611.
- KAGAN, Yu, BV SVISTUNOV & GV SHLYAPNIKOV (1985), « Effect of Bose condensation on inelastic processes in gases », in *JETP Lett* **42**.
- KARTAVTSEV, OI & AV MALYKH (2007), « Low-energy three-body dynamics in binary quantum gases », in *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **40**, p. 1429.
- KNOOP, S, F FERLAINO, M MARK, M BERNINGER, H SCHÖBEL, H-C NÄGERL & R GRIMM (2009), « Observation of an Efimov-like trimer resonance in ultracold atom-dimer scattering », in *Nature Physics* **5**, p. 227-230.
- KRAATS, J van de, DJM AHMED-BRAUN, J-L LI & SJJMF KOKKELMANS (2022), « The Efimovian three-body potential from broad to narrow Feshbach resonances », in *arXiv preprint arXiv :2210.14200*.
- KRAEMER, Tobias, Manfred MARK, Philipp WALDBURGER, Johann G DANZL, Cheng CHIN, Bastian ENGESER, Almar D LANGE, Karl PILCH, Antti JAAKKOLA, H-C NÄGERL et al. (2006), « Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms », in *Nature* **440**, p. 315-318.
- LANGMACK, Christian, Richard SCHMIDT & Wilhelm ZWERGER (2018), « Efimov states near a Feshbach resonance and the limits of van der Waals universality at finite background scattering length », in *Physical Review A* **97**, p. 033623.
- LEE, Mark D, Thorsten KOEHLER & Paul S JULIENNE (2007), « Excited Thomas-Efimov levels in ultracold gases », in *Physical Review A* **76**, p. 012720.
- LEVINSEN, J, NR COOPER & V GURARIE (2008), « Stability of fermionic gases close to a p -wave Feshbach resonance », in *Physical Review A* **78**, p. 063616.
- LI, Ang, Yaakov YUDKIN, Paul S JULIENNE & Lev KHAYKOVICH (2022), « Efimov resonance position near a narrow Feshbach resonance in a Li 6-Cs 133 mixture », in *Physical Review A* **105**, p. 053304.
- LOMPE, Thomas, Timo B OTTENSTEIN, Friedhelm SERWANE, Andre N WENZ, Gerhard ZÜRN & Selim JOCHIM (2010), « Radio-frequency association of Efimov trimers », in *Science* **330**, p. 940-944.

- MACHTEY, Olga, Zav SHOTAN, Noam GROSS & Lev KHAYKOVICH (2012), « Association of Efimov trimers from a three-atom continuum », in *Physical Review Letters* **108**, p. 210406.
- MESTROM, Paul MA, Jia WANG, Chris H GREENE & José P D'INCAO (2017), « Efimov–van der Waals universality for ultracold atoms with positive scattering lengths », in *Physical Review A* **95**, p. 032707.
- NAIDON, Pascal & Shimpei ENDO (2017), « Efimov physics : a review », in *Reports on Progress in Physics* **80**, 056001 (see also corrected version at arXiv :1610.09805v3).
- NAIDON, Pascal, Shimpei ENDO & Masahito UEDA (2014), « Physical origin of the universal three-body parameter in atomic Efimov physics », in *Physical Review A* **90**, p. 022106.
- (2021), « Erratum : Physical origin of the universal three-body parameter in atomic Efimov physics [Phys. Rev. A 90, 022106 (2014)] », in *Physical Review A* **104**, p. 059903.
- NAKAJIMA, Shuta, Munekazu HORIKOSHI, Takashi MUKAIYAMA, Pascal NAIDON & Masahito UEDA (2011), « Measurement of an Efimov trimer binding energy in a three-component mixture of ^6Li », in *Physical Review Letters* **106**, p. 143201.
- PETROV, D. S. (2004), « Three-Boson Problem near a Narrow Feshbach Resonance », in *Physical Review Letters* **93**, p. 143201.
- POLLACK, Scott E, Daniel DRIES & Randall G HULET (2009), « Universality in three- and four-body bound states of ultracold atoms », in *Science* **326**, p. 1683-1685.
- REM, B. S., A. T. GRIER, I. FERRIER-BARBUT, U. EISMANN, T. LANGEN et al. (2013), « Lifetime of the Bose Gas with Resonant Interactions », in *Physical Review Letters* **110**, p. 163202.
- ROY, Sanjukta, Manuele LANDINI, Andreas TRENKWALDER, Giulia SEMEGHINI, Giacomo SPAGNOLLI, Andrea SIMONI, Marco FATTORI, Massimo INGUSCIO & Giovanni MODUGNO (2013), « Test of the Universality of the Three-Body Efimov Parameter at Narrow Feshbach Resonances », in *Physical Review Letters* **111**, p. 053202.
- SCHMIDT, Richard, Steffen Patrick RATH & Wilhelm ZWERGER (2012), « Efimov physics beyond universality », in *The European Physical Journal B* **85**, p. 1-6.
- SCHÖLLKOPF, Wieland & J Peter TOENNIES (1994), « Nondestructive mass selection of small van der Waals clusters », in *Science* **266**, p. 1345-1348.
- SECKER, T, DJM AHMED-BRAUN, PMA MESTROM & SJJMF KOKKELMANS (2021), « Multichannel effects in the Efimov regime from broad to narrow Feshbach resonances », in *Physical Review A* **103**, p. 052805.
- SÖDING, J., D. GUÉRY-ODELIN, P. DESBIOLLES, F. CHEVY, H. INAMORI & J. DALIBARD (1999), « Three-body decay of a rubidium Bose–Einstein condensate », in *Appl. Phys. B* **69**, p. 257.
- STECHER, Javier von, Jose P D'INCAO & Chris H GREENE (2009), « Signatures of universal four-body phenomena and their relation to the Efimov effect », in *Nature Physics* **5**, p. 417-421.
- WANG, Jia, J. P. D'INCAO, B. D. ESRY & Chris H. GREENE (2012), « Origin of the Three-Body Parameter Universality in Efimov Physics », in *Physical Review Letters* **108**, p. 263001.
- WANG, Yujun & Paul S JULIENNE (2014), « Universal van der Waals physics for three cold atoms near Feshbach resonances », in *Nature Physics* **10**, p. 768-773.
- WERNER, Felix & Yvan CASTIN (2006), « Unitary gas in an isotropic harmonic trap : Symmetry properties and applications », in *Physical Review A* **74**, p. 053604.
- WILLIAMS, JR, EL HAZLETT, JH HUCKANS, RW STITES, Y ZHANG & KM O'HARA (2009), « Evidence for an excited-state Efimov trimer in a three-component Fermi gas », in *Physical Review Letters* **103**, p. 130404.
- XIE, Xin, Michael J Van de GRAAFF, Roman CHAPURIN, Matthew D FRYE, Jeremy M HUTSON, José P D'INCAO, Paul S JULIENNE, Jun YE & Eric A CORNELL (2020), « Observation of Efimov Universality across a Nonuniversal Feshbach Resonance in $\text{K } 39$ », in *Physical Review Letters* **125**, p. 243401.
- YUDKIN, Yaakov, Roy ELBAZ, P. GIANNAKEAS, Chris H. GREENE & Lev KHAYKOVICH (2019), « Coherent Superposition of Feshbach Dimers and Efimov Trimers », in *Physical Review Letters* **122**, p. 200402.
- YUDKIN, Yaakov, Roy ELBAZ & Lev KHAYKOVICH (2020), « Efimov energy level rebounding off the atom-dimer continuum », in *arXiv preprint arXiv :2004.02723*.
- ZACCANTI, Matteo, Benjamin DEISSLER, Chiara D'ERRICO, Marco FATTORI, Mattia JONA-LASINIO, Stefan MÜLLER, Giacomo ROATI, Massimo INGUSCIO & Giovanni MODUGNO (2009), « Observation of an Efimov spectrum in an atomic system », in *Nature Physics* **5**, p. 586-591.