RÉSUMÉ DES COURS

DE L'ANNÉE SCOLAIRE 1966-1967

I. SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES

Mathématique et mécanique

M. Szolem MANDELBROJT, professeur

Le théorème suivant donne une idée du sujet exposé dans la première partie de notre cours.

Soit $F \in L_{\infty}$, $a \geqq 0$, $K \in L_1$, et supposons que $\hat{K}$, la transformée de Fourier de K, ne s'annule pas dans $(-\infty, -a)$. Supposons que

$$K * F = 0. \tag{1}$$

Il existe alors une fonction F_o, holomorphe dans le demi-plan $y > 0$ $(z = x + iy)$, avec les propriétés

$$|F_o(z)| \leqq \|F\|_{\infty} e^{ay}$$

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{-N}^{N} |F_o(x + iy) - F(x)| \, dx = 0$$

quel que soit $N > 0$.

Il en résulte, par exemple, que si $\hat{K} \neq 0$ pour $|u| > a$, (1) implique que F est une fonction entière de type exponentiel a. On trouve, comme cas particuliers, les propriétés connues des solutions de l'équation $K * F = 0$. Par exemple, les résultats de Carleman, améliorés. L'équation de Wiener-Hopf a pu alors être discutée d'une manière approfondie.

On a pu indiquer les généralisations de Kunze du théorème cité au début. Il suffit ainsi, qu'à chaque $t \in (-\infty, -a)$ corresponde un $K \in L_1$ tel que $K * F = 0$, avec $\hat{K}(t) \neq 0$, pour que, de cet ensemble d'équations, on puisse tirer la même conclusion concernant F. En se basant sur un théorème de Segal, Kunze généralise le théorème pour R^n.

Une grande partie du cours a été consacrée à une généralisation, d'une part, de l'intégrale de Poisson, et, d'autre part, de la transformée de Fourier-Carleman portant sur un couple de fonctions holomorphes et bornées respectivement sur les deux demi-plans $y > 0$, $y < 0$.

E étant un m.p.h.p. (un ensemble de mesure harmonique positive, sans points irréguliers, situé sur R), soit $\varphi(z)$ la fonction introduite par Achieser et Lévin, qui donne la représentation conforme du demi-plan $y > 0$, soit sur le demi-plan $y > 0$, soit sur le quadrant $x > 0$, $y > 0$, soit, enfin, sur une demi-bande $a < x < b$, chacun de ces domaines étant muni de coupures verticales issues de l'axe réel, la base (la partie de la frontière située sur l'axe réel) correspondant à E, les coupures (dans les deux sens) à R-E. On fait correspondre à un couple (f_1, f_2) de fonctions, respectivement holomorphes dans $y > 0$, $y < 0$, un couple

$$(g_1, g_2) = \widehat{(f_1, f_2)_E},$$

défini par :

$$g_1(\zeta) = H(\zeta) - G(\zeta), \quad (\zeta = \xi + i\eta, \ \eta > 0)$$

$$g_2(\zeta) = H(\zeta) - G(\zeta), \quad (\eta < 0),$$

où

$$G(\zeta) = \int_L f_1(z)\omega(z\zeta)dz$$

$$H(\zeta) = \int_{L'} f_2(z)\omega(z\zeta)dz,$$

L et L' étant des demi-droites issues de l'origine, situées respectivement dans les demi-plans $y > 0$, $y < 0$; $\omega(z)$ étant la « fonction exponentielle attachée à E », c'est-à-dire $\omega(z) = \exp(-i\varphi(z)$.

On introduit alors la « transformée de Fourier inverse », c'est-à-dire un couple

$$\widehat{(g_1, g_2)^*_E}$$

qui permet de rétablir le couple (f_1, f_2) dont on est parti. On démontre, autrement dit, que le théorème de Fourier (dans certaines conditions : la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier est la fonction elle-même) est valable pour notre généralisation. Notre théorème généralise le théorème de Carleman valable pour des couples, lorsque E = R.

À un E, p.m.h.p., on fait aussi correspondre une fonction P(x, t, y) telle que lorsque $f \in L_\infty$, on a pour chaque point intérieur de E, où la fonction f est continue :

$$(2) \qquad f(x) \int P(x, t, 1)dt = \lim_{y \downarrow 0} \int f(t)P(x, t, y)dt.$$

Lorsque E = R, P(x, t, y) n'est autre que le noyau de Poisson $\frac{y}{(x-t)^2 + y^2}$ ($\int P(x, t, 1)dt = \pi$).

L'égalité (2) n'est pas valable, en général, lorsque $x \in R—E$.

La fonction P(x, t, y) s'exprime, dans le cas d'un E, p.m.h.p., quelconque, par une combinaison d'exponentielles attachées à E.

Nous avons pu, enfin, traiter le problème suivant : f(z) étant de type exponentiel sur $y \geqq 0$, avec $\log |f(x)| \leqq —C (|x|)$ sur E, indiquer des conditions liant C à E impliquant $f(z) \equiv 0$. On retrouve le théorème classique lorsque E = R.

Publications

S. Mandelbrojt, *Transformée de Fourier généralisée* (*C. R. Académie des Sciences,* t. 263, novembre 1966).

— *Considérations arithmétiques dans l'analyse harmonique* (*Problèmes contemporains de la théorie des fonctions analytiques,* Nauka, Moscou, 1966).

— *Exponentielles associées à un ensemble. Transformées de Fourier généralisées* (*Annales de l'Institut Fourier,* t. 17, 1, 1967).

Missions

Invité par l'Académie Bulgare des Sciences pour faire une conférence générale au Congrès des Mathématiciens Bulgares, Družba, Bulgarie (août 1967).