

## Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mercredi* a été consacré à un nouvel approfondissement de la théorie des ondes de choc en hydrodynamique et magnétohydrodynamique relativistes, à partir des *hypothèses de compressibilité* introduites systématiquement dans le cours de l'année précédente.

Si  $i$  est l'enthalpie spécifique du fluide thermodynamique relativiste envisagé, l'indice  $f$  de ce fluide est donné par :

$$f = 1 + \frac{i}{c^2}$$

Dans le cadre relativiste, la variable thermodynamique  $\tau = f V$  (où  $V$  est de volume spécifique) joue un rôle important et la relation  $\tau = \tau(p, S)$  (où  $p$  est la pression et  $S$  l'entropie spécifique) fournit une équation d'état particulièrement commode. Nous adoptons comme hypothèses de compressibilité, les inégalités

$$(H_1) \quad \tau'_p < 0 \quad \tau'_S > 0$$

et la condition de convexité

$$(H_2) \quad \tau''_{pp} > 0$$

L'inégalité  $\tau'_p < 0$  exprime simplement que si  $v$  est la vitesse par rapport au fluide des ondes soniques, on a  $v < c$ .  $(H_1)$  et  $(H_2)$  généralisent au cadre relativiste les classiques hypothèses d'Hermann Weyl.

Les études antérieures supposaient par définition les hypersurfaces  $\Sigma$  portant les ondes de choc orientées dans le temps et ainsi les vitesses correspondantes admissibles du point de vue relativiste. L'un des buts principaux du cours a été de démontrer que *les seules hypothèses  $(H_1)$  entraînent l'orientation dans le temps des ondes de choc*. Ce théorème repose sur une étude détaillée du comportement de la fonction  $\mathcal{H}$  d'Hugoniot de la magnétohydrodynamique relativiste et du comportement correspondant de l'entropie  $S$ .

Une nouvelle étude de la *stabilité* d'un choc non tangentiel (et non d'Alfven) a écarté les chocs singuliers comme instables et a conduit à caractériser les chocs *lents* et les chocs *rapides*.

Une seconde partie du cours utilisant les connaissances acquises sur le comportement de  $\mathcal{H}$  et de  $S$  a permis d'établir que les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  entraînent les conclusions suivantes : soit  $v_o^{ML}$ ,  $v_o^{MR}$ ,  $v_o^A$  les vitesses des ondes magnétosoniques respectivement lentes et rapides et la vitesse des ondes d'Alfven. Pour un choc rapide, on a

$$v_o^{ML} < v_o^A < v_o^{MR} < v_o^\Sigma$$

$$v_1^{ML} < v_1^A < v_1^\Sigma < v_1^{MR}$$

et pour un choc lent :

$$v_o^{ML} < v_o^\Sigma < v_o^A < v_o^{MR}$$

$$v_1^\Sigma < v_1^{ML} < v_1^A < v_1^{MR}$$

où les indices  $o$  et  $l$  correspondent respectivement aux états antérieur et postérieur au choc  $\Sigma$  et où  $v_o^\Sigma$ ,  $v_l^\Sigma$  sont les vitesses par rapport au fluide de l'onde de choc  $\Sigma$  avant et après le choc.

\*\*

Le cours du jeudi a porté sur les variétés kähleriennes compactes  $W_n$  dont la première classe de Chern  $C_1(W_n)$  est positive ou nulle.

On sait qu'en 1954, E. Calabi a émis une importante conjecture : si  $\gamma$  est une 2-forme de type (1,1) appartenant à  $C_1(W_n)$ , il existe sur la variété kählerienne compacte  $W_n$  une métrique kählerienne et une seule telle que  $\gamma$  soit la 2-forme associée au tenseur de Ricci de cette métrique. Si l'unicité a été aisément établie par CALABI lui-même, le problème général de l'existence d'une telle métrique demeure ouvert. Cette existence n'a été prouvée que tout récemment par Thierry Aubin dans le cas où la courbure correspondant à la métrique initiale de  $W_n$  satisfait à certaines inégalités (voir séminaire).

En raffinant les méthodes et les résultats du cours antérieur, on a pu établir le théorème principal suivant qui confirme l'intérêt de la conjecture de CALABI : Si  $W_n$  est une variété kählerienne compacte d'irrégularité  $q$  telle que  $C_1(W_n) \geq 0$ , on a  $0 \leq q \leq n$ . Si  $q = n$ ,  $W_n$  est un tore complexe. Si  $0 < q < n$ , l'application de Jacobi définit  $W_n$  comme un espace fibré analytique complexe sur la variété d'Albanese  $A_q(W_n)$ ; le groupe structural de cette fibration est abélien, discret et la fibre-type est une variété kählerienne compacte connexe  $Y_{n-q}$  telle que  $C_1(Y_{n-q}) \geq 0$ . Si  $\gamma \geq 0$  définit la première classe de Chern de  $W_n$ , la restriction de  $\gamma$  à une fibre définit la première classe de Chern de  $Y_{n-q}$ .

Si l'on admet la conjecture de Calabi comme vraie, le théorème dont la démonstration donnée dans le cours est techniquement assez lourde peut être atteint par des raisonnements relativement élémentaires.

#### SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

##### A. Série *Géométrie différentielle* :

Ce séminaire a été organisé en collaboration avec MM. André AVEZ et Marcel BERGER.

A. AVEZ, *Le théorème de Yamabe selon Thierry Aubin* (3 exposés) ;

Th. AUBIN, *Sur la conjecture de Calabi* (3 exposés) ;

M. BERGER, *Aspects contemporains de la théorie des formes harmoniques* (2 exposés) ;

RIDEAU, *Coordonnées isothermes et surfaces de Riemann* (2 exposés).

##### B. Série *Physique mathématique* :

SCHUCKING, *Problèmes de cosmologie relativiste* ;

ZUND, *Géométrie du tenseur de spin de Lanczos* ;

Y. CHOQUET-BRUHAT, *Quelques théorèmes globaux sur les espaces-temps* ;

LEVI-LEBLON, *Stabilité de la matière* ;

HAKIM, *Mécanique statistique relativiste*.

#### MISSIONS ET CONFÉRENCES

M. André LICHNEROWICZ a donné une des conférences générales du Congrès de l'American Physical Society de 1967. Il a participé aux rencontres physico-mathématiques de Seattle (juillet-août 1967), au Symposium of Relativistic Astrophysics de New York, au Colloque international de géométrie différentielle de Santiago (octobre 1967), au Colloque international Solvay sur la thermodynamique et mécanique statistique relativistes (Bruxelles, mai 1968).

Il a donné un cours de géométrie différentielle à l'Université de Californie (automne 1967) et à l'Université de Barcelone (mars-avril 1968). Il a été invité à donner des conférences à Stanford University, Rockefeller University, au Massachusetts Institute of Technology, aux Universités de Madrid et Valence.

PUBLICATIONS

A. LICHNEROWICZ, *Théorie des rayons en hydrodynamique et magnétohydrodynamique relativistes* (*Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 7, 1967, p. 271-302).

— *Variétés kähleriennes et première classe de Chern* (*Journ. of Diff. Geometry*, t. 1, 1967, p. 195-223).

— *Ondes de choc et hypothèses de compressibilité en magnétohydrodynamique relativiste* (*Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, p. 888-893).

— *Fluides et champ gravitationnel* (*Colloque international C.N.R.S.*, Paris, juin 1967).