RÉSUMÉ DES COURS

DE L'ANNÉE SCOLAIRE 1967-1968

I. SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES

Mathématique et mécanique

M. Szolem MANDELBROJT, professeur

Nous avons traité deux sujets distincts : « Propriétés arithmétiques du prolongement analytique » (les lundis) et « Les problèmes d'unicité dans la théorie des fonctions » (les jeudis).

Dans les leçons portant sur le premier sujet, nous considérons une fonction F(z) qui est — en désignant par LD la partie de la surface de Riemann de $\log z$ dont la projection sur le plan complexe est D — le prolongement analytique « direct » d'une série de la forme $\Sigma\, d_n z^{\lambda_n}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ (où les λ_n ne sont pas nécessairement des entiers) de LD(C) à LD(G), D(K) désignant le domaine intérieur à une courbe de Jordan simple K. Ici C est un disque $|z| < R$, et G une courbe possédant les propriétés suivantes : elle est donnée par $r = \varphi(\theta) > 0$ avec $\varphi(\theta) = \varphi(-\theta)$, $|\theta| \leqq \pi$, $\varphi(0) = 1$, D(G) contient l'origine ; la quantité

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{1}{\theta} = c = c(G)$$

existe et est finie.

Si G « abrite » Γ, c'est-à-dire si pour $z \neq 1$, $z \in \overline{D(\Gamma)}$, on a $z \in D(G)$, avec $c(\Gamma) < c(G)$ (Γ possédait des propriétés analogues à celles de G), et si la fonction $\Phi(z)$, avec $\Phi(1) = 1$, $\Phi'(1) > -1$, $\Phi(z) \neq 0$ pour $|z| < 1$ est holomorphe sur $|z| \leqq 1$, avec $z\Phi(z) \in D(\Gamma)$ pour $|z| < 1$ on a l'inégalité suivante

(A) $\quad |d_k| \leqq H \operatorname{Sup} |F(z)| . \operatorname{Inf} (|a_m^{(\lambda_k)}| \sqrt{\lambda_k + m})|)^{-1}$,

le « Sup » étant pris par rapport à LD(G), le « Inf » par rapport à tous les entiers positifs, pourvu que

(B) $\quad \lambda_k + m \neq \lambda_n + m'$

pour $k \neq n$, quels que soient les entiers m et m' avec $a_m^{(\lambda_k)} \neq 0$, $a_m^{(\lambda_n)} \neq 0$, $a_m^{(\lambda)}$ désignant le coefficient de z^m dans $(\Phi(z))^{\lambda}$.

Cet énoncé, qui est certes compliqué, a été démontré avec plusieurs explications sur la nature des courbes Γ, G ; sur le sens de la relation (B) etc. Plusieurs exemples, importants pour la suite, ont été mentionnés.

On obtient ainsi, comme cas particuliers du théorème général, des énoncés qui paraissent assez inattendus et qui se traduisent très différemment selon que les λ soient entiers ou non.

Ainsi, par exemple, à tout G « abritant $|z| < 1$ » correspond une constante B telle que pour *tout* k :

(C) $\quad |d_k| \leqq B \operatorname{Sup} |F(z)| \lambda_k^{-1/2}$

(le « sup » étant toujours pris par rapport à LD(G), B étant encore une constante).

Si G abrite la courbe donnée par $r = \cos \dfrac{\theta}{3}$ $(|\theta| \leqq \pi)$, on a :

(D) $\quad |d_k| \leqq B \operatorname{Sup} F|(z)|$

pour tout k tel que $\lambda_k - \lambda_n$ n'est un entier pour aucun n avec $n \neq k$.

Mais lorsque les λ_n sont tous entiers, (D) a lieu si

$$\lambda_{k+1} > 2\lambda_k > 4\lambda_{k-1}.$$

D'autres théorèmes en résultent qui permettent de caractériser le comportement du prolongement analytique de F(z) selon le caractère arithmétique de la suite $\{\lambda_n\}$.

Dans les leçons du jeudi on a étudié d'abord la relation, assez exacte, qui existe entre la décroissance d'une fonction sur R et celle de sa transformée de Fourier. Ainsi, il suffit que $C\{M_n\}$ et $C\{N_n\}$ soient des classes « dérivables », (c'est-à-dire telles que de $f \varepsilon C\{M_n\}$, résulte $f' \varepsilon C\{M_n\}$), ou, ce qui revient au même, qu'on ait $\log \overset{c}{M_n} = O(n^2)$, $\log \overset{c}{N_n} = O(n^2)$, pour que les deux relations $f \in S(\{M_n\}, \{N_n\})$ $\hat{f} \in S(\{N_n\}, \{M_n\})$ soient équivalentes. Ces relations peuvent s'exprimer par une comparaison des décroissances sans avoir à passer par des dérivées.

Pour les fonctions à support compact les théorèmes portent aussi bien sur la « lacunarité » des séries de Fourier. Nous ne citerons qu'un exemple : si f appartient à la classe de Gevray $C(\Gamma(\alpha n))$ ($|f^{(n)}(x)| \leqq \Gamma(\alpha n)$), si $f^{(n)}(0) = 0$, ($n \geqq 0$), et si

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$$

avec l'exposant de convergence de $|\lambda_n|$, égal à σ, de la relation $\alpha\sigma < 1$ résulte que $f \equiv 0$.

Publications

S. Mandelbrojt, *Fonctions entières et transformées de Fourier. Applications* (Monographie éditée par « Publications of the Mathematical Society of Japan », 1967).

— *Théorie des fonctions et théorie des nombres dans l'œuvre de Jacques Hadamard* (Monographie n° 16 de l'Enseignement Mathématique, Genève, 1967).

— *Considérations arithmétiques dans la théorie des fonctions analytiques* (*Israel Journal of Mathematics,* 1968).

Mission

Ensemble de conférences à l'Université (Institut de Recherches) d'Islamabad (Pakistan).