

Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mercredi* a été consacré au développement d'une nouvelle théorie des ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste. Cette théorie, basée sur une fonction d'Hugoniot sensiblement modifiée, permet d'atteindre plus simplement les différents résultats obtenus dans les cours antérieurs et surtout d'établir, pour la première fois, un théorème satisfaisant d'existence et d'unicité pour les solutions non triviales des équations de choc.

On a introduit systématiquement les variables :

$$\alpha = c^2 \tau - \mu H \quad , \quad \chi = |h|^2 + \frac{a^2}{l_x l^\alpha} H \quad , \quad \bar{q} = p + 1/2 \mu \chi$$

où τ est le volume dynamique ($\tau = fV$), a , H et $L = \chi \alpha^2$ les invariants de choc étudiés dans les cours antérieurs. L'analyse de la famille des états complets Y du fluide vérifiant $H(Y) = H(Y_0)$ et $L(Y) = L(Y_0)$ a conduit à caractériser un état thermodynamique du fluide par un point Z du plan (τ, \bar{q}) . La nouvelle fonction d'Hugoniot introduite s'écrit alors :

$$\mathcal{H}(Z_0, Z) = c^2 (f^2 - f_0^2) - (\tau + \tau_0)(p - p_0) + (\tau - \tau_0)^{1/2} \mu (\chi + \chi_0 - 2 \frac{\chi_0 \alpha_0}{\alpha})$$

et admet pour différentielle l'expression simple :

$$d\mathcal{H} = 2f(\theta)dS + (\tau - \tau_0)d\bar{q} - (\bar{q} - \bar{q}_0)d\tau .$$

Les principaux résultats se déduisent de l'analyse détaillée du comportement dans le plan Z , des fonctions \mathcal{H} et S . En particulier la courbe isentropique $S = S_0$ et le contour d'Hugoniot admettent en Z_0 un contact de second ordre ; on en déduit que, comme en hydrodynamique classique, l'accroissement d'entropie au cours d'un choc faible est du *troisième ordre* par rapport à la puissance du choc.

Le théorème fondamental obtenu est le suivant : si la fonction $S = S(p, \tau)$ définissant l'équation d'état, satisfait *les hypothèses de compressibilité* pour $\tau \leq \tau_0$ et pour des valeurs arbitrairement grandes de p , les conditions nécessaires mises en évidence concernant les vitesses des ondes de choc, pour l'état antérieur au choc, sont aussi suffisantes et le système général des équations de choc admet une solution non triviale unique.

Le cours du *jeudi* a porté sur la théorie des *applications harmoniques* d'une variété riemannienne dans une autre, due aux travaux de Eells-Sampson et de Ph. Hartman et aux conséquences de cette théorie concernant les variétés kähleriennes.

Soit W et W' deux variétés riemanniennes dont la première est supposée compacte. Par une modification conforme de l'intégrale d'énergie d'une application de W et W' , on a obtenu une généralisation de certains résultats importants de Eells-Sampson. A tout scalaire $f > 0$ sur W , on associe le tenseur symétrique C défini par :

$$C_{AB} = R_{AB} - \nabla_A \nabla_B \log f$$

où R_{AB} est le tenseur de Ricci de W et ∇ l'opérateur de dérivation covariante correspondant. S'il existe sur W un scalaire f , tel que C définisse une forme quadratique non négative et si W' compacte a une courbure sectionnelle non positive, on a montré que toute application continue de W dans W' est homotope à une application totalement géodésique. Il en résulte en particulier que sur une variété W' compacte à courbure sectionnelle non positive, il ne peut exister une métrique et un scalaire $f > 0$ tel que le tenseur C correspondant soit non négatif, à moins que le tenseur de Ricci de la nouvelle métrique ne soit identiquement nul.

On sait que si W et W' sont kähleriennes, toute application holomorphe de W dans W' est harmonique. A l'aide d'un théorème de Hartman, les applications harmoniques homotopes à une application holomorphe ont été étudiées. Des généralisations des résultats obtenus ont été données, pour le cas où W et W' sont presque kähleriennes. On a montré qu'une application presque holomorphe et une application presque antiholomorphe de W dans W' ne peuvent être homotopes que si ces deux applications sont constantes.

Dans le cas des variétés kähleriennes, différentes propositions ont été établies, dont les principales sont les suivantes :

1) Si W est à courbure de Ricci non négative et W' à courbure holomorphe bisectionnelle non positive, toute application holomorphe de W dans W' est totalement géodésique.

2) Si W est à première classe de Chern $C_1(W)$ positive ou nulle et W' à courbure complète non positive, toute application holomorphe de W dans W' est de rang constant.

3) Si $C_1(W)$ est localement définie positive et si W' est à courbure nulle, toute application continue de W dans W' est homotope à une application constante.

SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A. *Série géométrie différentielle :*

Ce séminaire, organisé en collaboration avec MM. André AVEZ et Marcel BERGER a porté sur les travaux de Hartman.

M. BERGER, *Survol de la théorie ;*

MITTEAU, *Le lemme fondamental de Hartman (2 exposés) ;*

P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Affranchissement de la condition auxiliaire de Eells et Sampson ;*

Mme BUTTIN, *Homotopie géodésique des applications harmoniques (2 exposés) ;*

B. *Série Physique mathématique :*

SCHURER, *Fondements nouveaux de la thermodynamique ;*

FLATO, *Applications physiques de la théorie des groupes ;*

VIGNON, *Sur l'équation de Boltzmann relativiste ;*

Mme VAILLANT, *Un théorème sur les systèmes aux dérivées partielles et applications ;*

NAGEL, *Sur un modèle de théorie des champs ;*

De GROOT, *La mécanique statistique et le tenseur d'énergie d'un champ électromagnétique avec induction.*

MISSIONS ET CONFÉRENCES

M. André LICHNEROWICZ a été visiting professor à la Rockefeller University (New York) pendant les mois d'octobre et de novembre 1968. Il a été professeur invité à l'Université de Rome pendant le mois de mars 1969. Il a participé au colloque international de physique mathématique de Stockholm (décembre 1968) et au colloque international de géométrie algébrique (Rome,

janvier 1969). Il a été invité à donner des conférences à Columbia University, Princeton University, aux Universités d'Amsterdam, de Stockholm et de Milan.

PUBLICATIONS

A. LICHNEROWICZ, *Sur les applications harmoniques (Comptes rendus Acad. Sc. Paris, t. 267, 1969, p. 548-553).*

— *Variétés kähleriennes et première classe de Chern (Coll. Int. Géométrie différentielle Santiago de Compostela et Acta Cientifica Compost., t. 5, 1968, p. 137).*

— *Théorème d'existence et d'unicité des chocs en Magnétohydrodynamique relativiste (Comptes rendus Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, p. 256-260).*

— *Variétés kähleriennes à première classe de Chern positive ou nulle (Ibidem, t. 268, 1969, p. 876-880).*

— *Ondes de choc et hypothèses de compressibilité en Magnétohydrodynamique relativiste (Commun. Math. Phys., t. 12, 1969, p. 145-174).*