Physique mathématique

M. André Lichnerowicz, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mercredi* a été consacré à l'analyse des propriétés topologiques qui interviennent dans le modèle mathématique d'un espace-temps physique. Les variétés différentielles V correspondantes doivent être de structure (C^2, C^4 par morceaux), toute précision supplémentaire de la structure étant dépourvue de sens physique. Toute extension possible du théorème P C T entraîne qu'elles admettent une orientation (globale).

Ces variétés doivent pouvoir être munies d'une métrique lorentzienne g. L'existence d'une connexion linéaire sur V (entraînée par celle de la métrique) implique que V est nécessairement paracompacte. Une variété lorentzienne (V, g) admet une orientation temporelle, si le champ de cônes défini par la métrique peut être décomposé en deux champs de demi-cônes (demi-cône futur et demi-cône passé).

Toute variété lorentzienne (V, g) admet un système global de lignes de temps. Pour qu'il existe sur V une métrique lorentzienne admettant une orientation temporelle, il faut et il suffit qu'il existe un système global de lignes orientées (ou un champ de directions orientées). Les résultats suivants dus à Markus et à M^me^ Choquet-Bruhat ont été établis et analysés.

a) Toute variété V paracompacte, non compacte, admet un champ de directions orientées. Une telle variété peut donc toujours être munie d'une métrique lorentzienne g admettant une orientation temporelle ;

b) Pour qu'une variété orientable compacte (cas d'un espace-temps périodique) admette une métrique lorentzienne, il faut et il suffit que sa caractéristique d'Euler-Poincaré soit nulle. S'il en est ainsi, il existe sur la variété des métriques lorentziennes admettant des orientations temporelles ;

c) Si V est paracompacte, non compacte, il existe sur V des métriques lorentziennes n'admettant aucune orientation temporelle correspondante.

Le théorème général d'existence d'une structure spinorielle sur une variété lorentzienne (V, g) compacte ou non a été établi par une approche cohomologique nouvelle. Dans le cas de la dimension 4, une étude critique a été faite d'une conjecture de Geroch concernant le fait que V serait alors parallélisable.

*
**

Le cours du *jeudi* a porté sur l'étude de certaines variétés kählеriennes compactes et sur l'analyse de fibrations holomorphes correspondantes. Soit J l'application de Jacobi de la variété kählerienne W, définie comme l'application holomorphe canonique de W dans sa variété d'Albanen A (W). Si G est le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W (d'algèbre de Lie L), J définit un homomorphisme canonique $\hat{J}$ de G dans le groupe G_A des translations de A (W). Nous noterons Γ le noyau de J, Γ sa composante connexe de l'identité et I l'idéal de L qui est l'algèbre de Lie de Γ.

Si W est une *variété de Hodge,* on a établi à partir de théorèmes d'A. Borel et de Blanchard les résultats suivants :

1°) Pour qu'un élément X de l'algèbre L des transformations infinitésimales holomorphes appartienne à l'idéal I, il faut et il suffit que X admette au moins un zéro sur W ;

2°) Le groupe Γ coïncide avec le groupe K'_0 induit par le plus grand groupe connexe K_0 de transformations projectives qui laissent W invariante dans un plongement de Blanchard ;

3°) Le groupe $H = \hat{\Gamma}/\Gamma$ est fini.

Si W est une *variété kählerienne compacte* d'irrégularité $p = b_{1,0}(W)$ et *à première classe de chern* $\geqslant$ *0,* les propriétés suivantes ont été démontrées :

1°) Le groupe $\hat{\Gamma}$ est fermé dans G.

2°) L'application de Jacoli définit W comme fibré holomorphe sur sa variété d'Albanese, à groupe structural abélien, discret. La fibre-type W′ est une variété kählérienne compacte connexe telle que C_1 (W′) soit $\geqslant$ 0.

Si le tenseur de Ricci de W est $\geqslant$ 0 ou si d'R définit une transformation infinitésimale holomorphe, il en est respectivement de même pour W′ et le groupe $H = \hat{\Gamma}/\Gamma$ est encore fini. Par suite si W est une variété kählérienne compacte à C_1 (W) $\geqslant$ 0, vérifiant l'une des trois hypothèses

a) W est variété de Hodge ;

b) le tenseur de Ricci de W est $\geqslant$ 0 ;

3) La 1-forme d'R de W définit une transformation infinitésimale holomorphe il existe un revêtement fini V de W fibré holomorphiquement sur A

(V) en variétés kähleriennes compactes connexes F, à C_1 (F) $\geqslant$ 0 et inégularité nulle. Le groupe de revêtement est résoluble.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A. — *Série géométrie différentielle*

Ce séminaire a porté sur les systèmes différentiels surdéterminés, selon Donald Spencer, Guillemin et Quiller.

Les exposés ont été donnés par MM. Rideau, Mitteau, Mazet et par Mme Buttin et Lehman.

B. — *Physique mathématique*

Bertotti, *Analyse théorique des expériences sur les ondes de gravitation ;*

Bel, *Systèmes relativistes prédictifs ;*

Bacry, *Problèmes de dynamique relativiste* ;

Simon, *Le groupe conforme en relativité ; notion de poids conforme ;*

Flato, *Axiomatique de Whightman pour le champ de gravitation.*

Missions et conférences

M. André Lichnerowicz a présidé le 2e colloque franco-suédois de physique mathématique sur la théorie des champs qui s'est tenu du 1er au 6 juin 1970 au Collège de France. Il a été professeur invité à la session du 9 au 19 juin 1970 du Centre italien de Mathématiques (C.I.M.E.) et à l'Ecole mathématique de recherches organisée du 7 au 21 juillet 1970 par l'American Mathematical Society et l'Université du Colorado. Il a été conférencier invité au Colloque international de Berne (mai 1970) sur *Topologie et relativité.* Il a donné des conférences aux Universités de Rome, Milan, Strasbourg, Marseille et Rennes.

PUBLICATIONS

André LICHNEROWICZ, *Applications harmoniques et variétés kählеriennes* (*Symposia Mathematica Istituto Naz. di Alta Matematica*, t. 3, p. 341-402, 1970).

— *Ondes de choc et ondes en Magnetohydrodynamique relativiste* (*Coll. intern. C.N.R.S.*, Paris, 1969, p. 25-41).

— *Applications harmoniques dans un tore* (*Comptes rendus Acad. Sci.*, Paris, t. 269, 1969, p. 912-916).