

Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

La conception contemporaine de la thermodynamique (Callen, Tisza, Onsager) met en évidence une axiomatique d'échanges entre systèmes physiques d'un caractère très général. La distinction entre variables « extensives » et variables « intensives » par exemple paraît adaptée à tout processus d'échange, quel que soit le domaine concret où s'opère un tel échange.

Le premier cours a été consacré au développement et à l'analyse d'un modèle d'échange économique dû à Marc Lichnerowicz et dont les principes sont « analogues » à ceux de la thermodynamique ou inspirés par ceux-ci. Après avoir introduit les notions de cellules économiques, simples ou composites, et de réservoir extérieur, on a explicité les principes régissant la recherche des états d'équilibre. Dans ces principes intervient une fonction de satisfaction qui joue un rôle identique à celui de l'entropie. Une interprétation des prix comme variables intensives s'en déduit.

On a ensuite procédé à l'étude de la stabilité de l'équilibre d'une ou de plusieurs cellules en interaction. L'analyse de la stabilité intrinsèque d'une cellule simple met en évidence d'une manière inattendue la liaison entre les variations des quantités de bien détenues et celles des prix et conduit par suite à un véritable principe de Le Chatelier. Il s'agit là de l'une des conséquences intéressantes du modèle qui permet de donner un sens précis à des considérations de Samuelson.

L'analyse mathématique de processus dynamiques pouvant caractériser l'ajustement des quantités de bien détenues par une cellule lorsque les prix sont imposés par une agence ou correspondent aux échanges de biens entre cellules a conduit à des systèmes différentiels dont l'étude globale a pu être faite. De tels systèmes non linéaires sont semblables à ceux intervenant dans la théorie dynamique des réactions chimiques.

Le cours de géométrie différentielle a porté sur les variétés riemanniennes compactes à « courbure de Ricci généralisée » C non négative. Il s'agit là d'une théorie qui est partiellement l'analogue dans le cas réel de la théorie des variétés kähleriennes compactes à première classe de Chern non négative, développée dans un cours antérieur.

Soit (W, g) une variété riemannienne compacte, orientée. A une telle variété, on peut associer d'une manière naturelle un tore canonique $B(W)$ et une application harmonique J de W dans $B(W)$ admettant la propriété universelle suivante : toute application harmonique de (W, g) dans un tore réel T se factorise en le produit de J et d'une application affine de $B(W)$ dans T .

A tout scalaire $f > 0$ sur W , associons le tenseur symétrique C défini par :

$$C_{ij} = R_{ij} - \nabla_i \nabla_j \log f$$

où R_{ij} est le tenseur de Ricci de (W, g) et ∇ l'opérateur de dérivation covariante. S'il existe sur W un scalaire f tel que C définisse une forme quadratique partout non négative, on dira que (W, g) est à « courbure de Ricci généralisée » non négative. On a établi que l'application J définit alors W comme espace fibré différentiel sur $B(W)$, de groupe structural abélien discret. La variété (W, g) est réductible et admet une foliation en feuilles plates au-dessus de $B(W)$. La fibre-type (W', g') est une variété riemannienne compacte connexe qui est encore à courbure de Ricci généralisée non négative.

A partir de ce théorème, il a été possible d'étendre les principaux résultats de Cheeger et Gromoll concernant les variétés à courbure de Ricci non négative à la présente situation. On a d'abord montré que si (W, g) est une variété riemannienne complète admettant un scalaire $f > 0$ tel que $|\log f|$ soit borné sur W et que le tenseur C correspondant soit non négatif, (W, g) est le produit riemannien de R^k (facteur euclidien maximal) et d'une variété (\bar{W}, \bar{g}) dépourvue de droites au sens de Toponogov. On en déduit que si (W, g) est une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci généralisée non négative, son revêtement (\tilde{W}, \tilde{g}) est le produit riemannien de R^k et d'une variété (\bar{W}, \bar{g}) compacte.

On a pu donner de k l'interprétation suivante : k est le maximum des premiers nombres de Betti des revêtements finis de la variété compacte W . On en déduit que si le tenseur $C \geq 0$ est défini positif en un point de W , le groupe fondamental de W est fini, ce qui constitue une ample généralisation du théorème de S. B. Myers.

Une variété kählerienne compacte à courbure de Ricci généralisée $C \geq 0$ est à première classe de Chern $C_1(W) \geq 0$. Si cette classe est de rang maximum, on déduit du théorème précédent que la variété est simplement connexe.

SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A. Série géométrie différentielle

S. BERGMAN, *Propriétés des domaines bornés de C^n* ;

E. MAZET, *Seconde variation de l'énergie et applications harmoniques* (2 exposés) ;

J.-C. MITTEAU, *Equation parabolique associée aux applications harmoniques* (2 exposés) ;

AKBAR-ZADEH, *Espaces de nullité en géométrie riemannienne et finslerienne*.

B. Série physique mathématique

SOURIAU, *Théorie des milieux continus en relativité* ;

M. CAHEN, *Espaces symétriques pseudo-riemanniens* ;

GUIRAUD, *Problèmes mathématiques liés à l'équation de Boltzmann* ;

CRUMEYROLLES, *Groupes de spinorialité*.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

M. André Lichnerowicz a été invité par le Comité international d'organisation à donner une conférence au Congrès international des Mathématiciens qui s'est tenu à Nice en septembre 1970. Il a été chargé de donner, pour l'année 1971, les conférences Wolfgang Pauli à l'Ecole Polytechnique fédérale de Zürich. Il a été professeur invité à cette école pendant les mois de janvier et février 1971. Il a participé au Colloque international de Géométrie différentielle de Rome (mai 1971) et au Colloque international de Physique mathématique de Göteborg (juin 1971). Il a été invité à la conférence d'Astrophysique relativiste de Dallas (décembre 1970).

M. André Lichnerowicz a donné un cours de douze leçons sur les variétés complexes à la Summer School des Universités de l'Ouest des Etats-Unis qui a eu lieu à Santa-Fe (New-Mexico) en juillet 1970. Il a été invité à donner des conférences aux Universités de Lisbonne, Rome, Florence, Turin et Naples.

PUBLICATIONS

A. LICHNEROWICZ, *Applications harmoniques et variétés kähleriennes* (Symp. Matem. Istituto di Alta Matematica, t. 3, 1970).

— *Variétés riemanniennes à tenseur C non négatif* (Comptes rendus Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 650-654).

— *Points-selles et systèmes différentiels* (Ibidem, t. 271, p. 1123-1128).

— *Shock waves in Relativistic Magnetohydrodynamics* (Physica Scripta, t. 2, p. 221-225).

— *Espaces fibrés et espaces-temps* (General Relat. and Gravitation, t. 1, p. 235-245).

— *Ondes de choc, ondes infinitésimales et rayons* (Cours du Centro Int. Matem. Estivo [C I M E], p. 90-203, 1971).