

Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mercredi* a été consacré à la théorie mathématique des ondes de choc gravitationnelles et électromagnétiques dont on sait l'importance présente : une dizaine d'équipes, à travers le monde, a entrepris, à la suite des travaux de Weber, la détection expérimentale des ondes et ondes de choc gravitationnelles. Ces ondes de choc ont fait l'objet, depuis dix ans, d'intéressants travaux de Taub, Synge et de M^{me} Choquet-Bruhat. On a développé ici leur étude dans un cadre plus général et obtenu des résultats plus précis, à partir de l'utilisation systématique d'une technique de tenseurs-distributions, élaborée à cet effet.

Une onde de choc gravitationnelle est définie par une métrique g , solution des équations d'Einstein en un sens faible convenable, et telle que les dérivées premières des potentiels significatifs soient effectivement discontinues à la traversée d'un front d'onde Σ . Pour définir les équations d'Einstein en un sens faible, on a introduit systématiquement une notion nouvelle de tenseur-distribution de courbure et le tenseur-distribution de Ricci correspondant. Cette approche conduit, sous la seule hypothèse que le tenseur d'énergie est régulièrement discontinu à la traversée de Σ , à des conditions de choc qui expriment d'une part que Σ est nécessairement caractéristique par rapport au champ des cônes élémentaires, d'autre part que les quantités harmoniques attachées à tout système de coordonnées locales sont continues à la traversée de Σ . Ces conditions permettent l'introduction sur Σ d'une géométrie intrinsèque. Sous l'hypothèse faite concernant le tenseur d'énergie, on a établi l'existence d'un système différentiel régissant la propagation des discontinuités et la conservation des énergies de choc le long des rayons qui engendrent Σ .

Les résultats précédents peuvent être étendus et adaptés aux ondes de choc électromagnétiques dont le front d'onde Σ peut être aussi éventuellement un front d'onde gravitationnelle. L'un des résultats essentiels qui appa-

raît est le suivant : dans le cadre des équations d'Einstein-Maxwell, tout front d'onde d'une onde de choc électromagnétique effective est nécessairement, sauf dans un cas exceptionnel, front d'onde d'une onde de choc gravitationnelle effective, qui peut être considérée comme créée par l'onde de choc électromagnétique. Le cas exceptionnel écarté est celui où le champ électromagnétique serait « semi-singulier » sur le front d'onde Σ . Ces résultats peuvent être étendus à des ondes de choc correspondant à des champs de masse nulle et spin quelconque (neutrinos par exemple). On dispose donc ainsi d'un processus général de création d'ondes de choc gravitationnelles.

*
**

Soit (W, F) une variété symplectique paracompacte. Le cours du *jeudi* a été consacré à une étude de l'algèbre de Lie L — de dimension infinie — des automorphismes infinitésimaux de la structure symplectique. Si X appartient à L , $i(X)F$ est une 1-forme fermée sur W . On désigne par L^* l'idéal de L défini par les éléments X tels que $i(X)F = du$ soit une 1-forme exacte ; L_0 est l'idéal de L des vecteurs à supports compacts, L_0^* l'idéal défini par $i(X)F = du$, où u est à support compact ; l'idéal L_1 , contenu dans L_0^* , correspond au cas où l'intégrale de u , pour l'élément de volume naturel, est nulle. Une algèbre de Lie est dite ici semi-simple si elle n'admet aucun idéal abélien non nul ; elle est dite réductive si elle est somme directe d'un idéal abélien et d'un idéal semi-simple.

Les deux instruments principaux de l'étude de L et de ses idéaux sont les suivants : la généralisation d'un lemme de Calabi relatif à la représentation d'une fonction locale comme somme de crochets de Poisson, l'existence établie antérieurement d'une forme quadratique définie positive sur L_0^* , invariante par L . On a montré que toute sous-algèbre de L_0^* dont le centre est de dimension finie est réductive et que l'idéal dérivé de toute sous-algèbre de L_0^* est semi-simple. On a établi que L^* est l'idéal dérivé de L et que L_1 est son propre idéal dérivé.

Si J est un idéal de L contenant L_1 , on a étudié les idéaux transitifs I de J ; on a établi en particulier qu'ils sont semi-simples et contiennent nécessairement L_1 , généralisant ainsi un résultat récent d'E. Calabi. On se propose, dans un cours ultérieur, d'étudier la cohomologie de ces différentes algèbres.

SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A. *Série physique mathématique* :

- W. BONNOR, Null curves in Minkowski space-time ;
- C. de WITT, Résultats nouveaux sur l'intégrale de Feynman ;
- G. ELLIS, Equations d'Einstein-Boltzmann ;
- B. CARTER, Les trous noirs stationnaires ;
- S. DESER, Relativité générale, une singularité ?
- J. A. WHEELER, Beyond the end of Time.

B. *Série géométrie différentielle* :

- I. CATTANEO, Automorphismes dans un espace homogène ;
- L. MICHEL, Géométrie différentielle et symétrie interne des hadrons (2 exposés) ;
- E. MAZET, Nouvelles applications de la variation seconde de l'énergie ;
- LEFEVRE, Automorphismes de structures de contact ;
- J. GIRBAU, Extension du théorème de Kodaira ;
- GAUDUCHON, Fibrés vectoriels holomorphes positifs.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

M. André Lichnerowicz a été professeur invité à l'Université du Texas pendant les mois de septembre et octobre 1971, et professeur invité aux Universités de Rome et Lecce en mai 1972. Il a été invité par l'Académie des Sciences d'URSS en novembre 1971. Il a donné des conférences générales à l'Académie de Rhin-Westphalie. Il a participé au Colloque international de Relativité générale de Rome (février 1972).

M. André Lichnerowicz a donné des conférences aux Universités d'Amsterdam, La Haye, Utrecht, Coimbra et Lisbonne.

PUBLICATIONS

A. LICHNEROWICZ, *Quantum field theory on a curved background* (Symposium on Mathematical Problems in theories of particules, Göteborg, juin 1971).

— *Ondes de choc gravitationnelles et électromagnétiques* (Colloque international de Rome, février 1972).

— *Sur les ondes de choc gravitationnelles* (*Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. 273, p. 528-532).

— *Sur l'algèbre de Lie des automorphismes symplectiques* (*Ibidem*, t. 274, p. 1177-1181).

— *Sur les idéaux de l'algèbre de Lie des automorphismes d'une variété symplectique* (*Ibidem*, t. 274, p. 1494-1498).

— *Sur les transformations holomorphes des variétés kähleriennes compactes* (*Ibidem*, t. 273, p. 1148-1151).

— *Zéros des vecteurs holomorphes sur une variété kählerienne* (*Differential Geometry in honor of K. Yano*, Tokyo, p. 253-266).

— *Variétés kähleriennes à première classe de Chern non négative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative* (*Journ. of Differential Geometry*, t. 6, p. 47-94).