RÉSUMÉ DES COURS
DE L'ANNÉE SCOLAIRE 1971 - 1972

I. SCIENCES MATHÉMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES

Mathématique et mécanique

M. Szolem MANDELBROJT, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Approximation polynomiale et problèmes des moments

Il s'agit de l'approximation polynomiale pondérée sur la droite $\mathbb{R}$ entière, avec des polynômes de la forme $P_n(x) = \sum_{i}^{n} a_m x^{\nu_m}$, $\{\nu_n\}$ étant une suite d'entiers positifs, croissants, donnée. On cherche donc une relation entre une fonction positive croissante $F(x)$ $(x \geqq 0)$, $\log F(x)$ étant une fonction convexe de $\log x$, et la suite $\{\nu_n\}$ pour que, quelle que soit la fonction continue $f(x)$ $(x \geqq 0)$ telle que $\lim_{x \to \infty} f(x)/F(x) = 0$, à tout $\varepsilon > 0$ corresponde un $P_n(x)$ de la forme indiquée avec $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon F(x)$ $(x \geqq 0)$. Pour $\nu_n = n$ $(n \geqq 0)$, où n est entier, le problème est classique (S. Bernstein, Mergelian, Pollard, etc.). Dans le cas général traité dans notre cours il faut appliquer les séries adhérentes introduites par le professeur (une telle approximation sur toute la droite $\mathbb{R}$ s'obtient facilement à partir du problème qu'on vient de traiter).

On a traité également le problème d'unicité du problème de Stieltjes généralisé. A savoir, $\{\nu_n\}$ étant défini comme plus haut, soit $\{m_n\}$ une suite de nombres positifs, et supposons qu'il existe une fonction non décroissante $V(x)$ telle que

$$(1) \qquad \int_0^\infty x^{\nu_n} \, dV(x) = m_n ;$$

trouver une liaison entre $\{\nu_n\}$ et $\{m_n\}$ pour que cette solution soit unique, c'est-à-dire pour que deux fonctions non-décroissantes V_1 et V_2 satisfaisant à (1) (la suite $\{m_n\}$ étant donnée), soient nécessairement équivalentes.

Mais, préalablement on démontre le théorème suivant : soit $F(x)$ $(x \geqq 0)$ une fonction positive, $\log F(x)$ étant une fonction convexe de $\log x$; soit $\{\nu_n\}$ une suite positive croissante avec $\lim\inf (\nu_{n+1} - \nu_n) > 0$. On indique alors une condition U (voir « Séries adhérentes », G.-V. 1952) — qui s'exprime par la divergence d'une intégrale pour que toute fonction à variation bornée $\Phi(x)$ sur $[0,\infty[$ qui satisfait aux conditions

$$\int_0^{\infty} \frac{d\Phi(x)}{F(x)} = \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu_n} d\Phi(x)}{F(x)} = 0 \ (n \geqq 1),$$

soit équivalente à une constante.

La dernière leçon a été consacrée à quelques principes très généraux d'analyse harmonique — principes introduits par le professeur et qui sont à la base de plusieurs recherches concernant, d'une part, le « prolongement » d'une propriété à partir d'un segment à la droite entière, et, d'autre part, aux problèmes dont quelques-uns viennent d'être mentionnés.

Cette conférence paraîtra prochainement dans une monographie publiée par le Collège de France.

Missions

Président de la Table Ronde internationale du C.N.R.S. consacrée à l'Analyse harmonique dans le domaine complexe. Montpellier, septembre 1972.