

Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mercredi* a été consacré aux problèmes posés par l'élaboration d'une théorie quantique des champs sur un espace-temps courbe, sujet déjà traité dans un cours antérieur, mais qui a pu être approfondi en particulier grâce aux travaux de Combet et Moreno. On sait que la théorie de Leray permet de définir, en ce qui concerne les espaces-temps courbes globalement hyperboliques, la notion de propagateur correspondant aux différents spins.

Sur la variété des solutions de l'équation de Klein-Gordon astreintes à des conditions asymptotiques convenables, le propagateur définit une structure symplectique. Les cas des spins 0, 1/2, 1 ont été explicitement traités et l'on a établi que les propagateurs vérifient des identités différentielles qui permettent de construire, à partir de ces propagateurs, les commutateurs ou anticommutateurs correspondant à ces champs. Il en est de même pour les champs de spin 2 dans le cas où l'espace-temps fondamental satisfait les équations d'Einstein.

Conformément à un point de vue développé antérieurement, on a montré que la théorie des opérateurs de création-annihilation revient à munir la variété symplectique d'applications précédente, d'une structure presque kählerienne subordonnée convenable, définie par un noyau G_1 satisfaisant une formule de composition le reliant au propagateur. Combet et Moreno ont pu démontrer l'existence et l'unicité de G_1 dans le cas des espaces-temps stationnaires vérifiant des conditions asymptotiques convenables. La théorie correspondante a été développée dans le cas des neutrinos.



Le cours du *jeudi* a été consacré à un approfondissement — par rapport au cours antérieur — de l'étude des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique (W, F) , de dimension $2n$. Pour qu'un champ de vecteurs X définisse une transformation infinitésimale (t. i.) symplectique de (W, F) , il

faut et il suffit que la 1-forme $i(X)F$ soit fermée. On note L l'algèbre des t. i. symplectiques, L^* l'idéal de L défini par les 1-formes exactes du, où $u \in N = C^\infty(W; R)$; L_\circ^* est l'idéal, contenu dans L^* , correspondant au cas où u est à support compact, L_1 l'idéal contenu dans L_\circ^* correspondant au cas où u est d'intégrale nulle pour l'élément de volume naturel F^n . La parenthèse de Poisson définit sur N une structure d'algèbre de Lie (dite algèbre de Lie dynamique). La théorie fait intervenir nécessairement l'algèbre de Lie L^c des t. i. conformes symplectiques dont L , L^* , L_\circ^* , L_1 sont des idéaux.

Dans une première partie du cours, on a étudié les idéaux I d'une sous-algèbre A de L contenant L_1 . A tout ensemble fermé f de W , on peut associer un idéal $I_c(f)$ de L , contenu dans L_1 , défini à partir des $(2n - 1)$ — formes Ψ à supports compacts $S(\Psi) \subset C f$ (avec $u F^n = d\Psi$); $I_c(f)$, de fermé de nullité f , est dit l'idéal canonique associé à f . Si M est un sous-espace vectoriel de L admettant f comme fermé de nullité et invariant par $I_c(f)$, on a établi que :

$$I_c(f) \subset M \quad [M, I_c(f)] = I_c(f).$$

On en déduit qu'un idéal $I \neq \{0\}$ de A admettant f comme fermé de nullité jouit des mêmes propriétés par rapport à $I_c(f)$ et en particulier ne peut être de dimension finie. On a démontré que I est nécessairement semi-simple et n'admet jamais d'idéal supplémentaire dans A , à moins d'être trivial. Des résultats plus fins sont obtenus en ce qui concerne les idéaux de L_1 , fermés pour une topologie convenable.

Dans une seconde partie du cours, on s'est intéressé à la détermination des dérivations des différentes algèbres de Lie introduites. On a démontré que les dérivations de L^c , L , L^* sont données par le crochet par les éléments de L^c . On en a déduit les premiers espaces de cohomologie de ces algèbres, pour la cohomologie de Chevalley-Eilenberg. En ce qui concerne l'algèbre dynamique N les résultats sont différents selon que W est compacte ou non. Dans le cas non compact, l'algèbre des dérivations de N est encore isomorphe à L^c ; par contre dans le cas compact, les dérivations de N qui ont été entièrement déterminées ne sont pas locales en général.

L'un des instruments principaux de cette double étude est fourni par un « lemme principal » relatif à la représentation locale de fonctions comme somme de $2n$ parenthèses de Poisson, pour lesquelles n fonctions peuvent être choisies arbitrairement à une condition d'indépendance près.

SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A. Série physique mathématique

S. DESER, *Stabilité d'espaces-temps einsteiniens* ;

BRILL, *Traitement hamiltonien et énergie du champ gravitationnel* ;

Y. CHOQUET-BRUHAT, *Théorème global d'unicité en relativité générale* ;

BRAZANSKI, *Processus variationnels et seconde variation en théorie des champs* ;

B. SIMON et GUERRA (avec la collaboration de LASCoux), *Journées d'introduction à la théorie constructive des champs*.

B. Série géométrie différentielle

M. CAHEN, *Espaces symétriques pseudoriemanniens* ;

J. MARTINET, *C^0 -déformations de formes de Pfaff* ;

LUTZ, *Structures de contact sur les variétés de dimension 3* (2 exposés).

MISSIONS ET CONFÉRENCES

M. André LICHNEROWICZ a été professeur invité à la Rockefeller University de New York et à l'Université de Waterloo (Ontario) en septembre et octobre 1972. Sur invitation de l'Académie des Sciences d'URSS, il a donné une conférence générale à la Conférence internationale sur les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs de Moscou (décembre 1972). Il a participé au Colloque international sur les variétés symplectiques et leurs applications à la physique mathématique de Rome (janvier 1973), au Colloque international CNRS sur les ondes gravitationnelles de Paris (juin 1973), aux rencontres internationales entre mathématiciens et physiciens de Strasbourg (novembre 1972 et mai 1973), aux journées de géométrie différentielle de la Société mathématique de France (Mulhouse, mai 1973).

M. André LICHNEROWICZ a donné des conférences aux Universités de Bruxelles, Nancy, Toronto.

PUBLICATIONS

André LICHNEROWICZ, *Ondes de choc gravitationnelles et électromagnétiques* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. 276, mai 1973, sous presse).

— *Algèbres d'automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique* (Colloque international de Rome, janvier 1973).

— *Dérivations de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. 275, p. 709-714).

— *Sur l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact* (*Ibidem*, t. 275, p. 825-829).

— *Dérivations de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une variété unimodulaire* (*Ibidem*, t. 276, p. 55-60).

— *Sur l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une variété unimodulaire* (*Ibidem*, t. 276, p. 150-155).

— *Algèbres de Lie et groupes de difféomorphismes pour les structures classiques* (*Ibidem*, t. 276, p. 1113-1118).

A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ, *Dérivations et premier groupe de cohomologie pour des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique* (*Ibidem*, t. 275, p. 113-118).