Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mardi* a été consacré à l'étude des algèbres de Lie attachées à une variété de contact (W, ω), de dimension $(2n + 1)$, où ω est une 1-forme de classe $(2n + 1)$. On note L (resp. L_0) l'algèbre de Lie des *transformations infinitésimales de contact* de (W, ω) (resp. à supports compacts). Il existe un isomorphisme entre l'algèbre de Lie L (resp. L_0) et l'algèbre de Lie définie sur l'espace N (resp. N_0) des fonctions indéfiniment différentiables sur W (resp. à supports compacts) par le crochet de Jacobi induit par ω. Une interprétation nouvelle — semble-t-il — du crochet de Jacobi a été donnée en termes du crochet de Poisson d'une variété symplectique $(\tilde{W}, \tilde{\tilde{F}})$ associée à (W, ω) et de dimension $(2n + 2)$. Une étude générale de la correspondance entre variétés symplectiques et variétés de contact a été développée.

Un des premiers objectifs du cours a été l'extension au cas des variétés de contact des principaux résultats concernant les idéaux, obtenus antérieurement dans le cas des variétés symplectiques. Soit A une sous-algèbre de L contenant L_0. A tout ensemble fermé f de W, on peut associer un idéal Ic (f) de L défini à partir des éléments u de N_0 à supports $S(u) \subset C\, f$. L'idéal I_0 (f) de fermé de nullité f est dit l'idéal canonique associé à f. Si M est un sous-espace vectoriel de L admettant f comme fermé de nullité et invariant par I_c (f), on a établi que

$$[M, I_c(f)] = I_c(f) \qquad\qquad I_c(f) \subset M$$

On en déduit encore qu'un idéal $I \neq \{0\}$ de A admettant f comme fermé de nullité jouit des mêmes propriétés que M par rapport à I_c (f) et, en particulier, ne peut être de dimension finie ; il est nécessairement *semi-simple*. Un idéal non trivial de A ne peut admettre d'idéal supplémentaire dans A.

L'un des instruments principaux de cette étude est fourni par un « lemme principal » qui permet d'exprimer toute fonction à support compact suffisamment petit, comme somme de $(2n + 2)$ crochets de Jacobi, dont la moitié des facteurs peut être choisie arbitrairement sous des conditions convenables d'indépendance. Pour l'établissement de ce lemme, la variété symplectique associée joue un grand rôle.

Le second objet du cours a été la détermination des dérivations de l'algèbre de Lie L. Une longue étude technique a permis d'établir que ces dérivations sont données par des opérateurs différentiels du premier ordre. On peut en déduire que toutes les dérivations de L sont intérieures et que, par suite, le premier espace de cohomologie de l'algèbre de Lie L, pour la cohomologie de Chevalley-Eilenberg, est nul.

*
**

Le cours du *mercredi* a été consacré à l'étude des tenseurs holomorphes sur une variété kählerienne compacte. A l'exception des vecteurs holomorphes, les tenseurs contravariants, antisymétriques d'ordre r (ou r-tenseurs) holomorphes ont été rarement introduits et étudiés. C'est cependant leur considération qui intervient de manière décisive dans l'étude de certaines propriétés des formes holomorphes elles-mêmes. De même on n'a pas introduit, à côté des plurigenres P_l, ce que nous nommons les plurigences duaux Q_l qui correspondent aux (l,n)-tenseurs (contravariants) holomorphes.

La première partie du cours a porté sur l'étude de l'algèbre de Lie graduée définie sur l'espace des tenseurs holomorphes par le crochet de Schouten-Nijenhuis. Soit T^r l'espace des r-tenseurs holomorphes, I^r le sous-espace de T^r défini par les r-tenseurs qui annulent toute r-forme holomorphe. On établit que $[T^r, T^s] \subset I^{r+s-1}$. On peut en déduire le résultat suivant : étant donné un scalaire $f \geqslant 0$, soit $U^r(f)$, le sous-espace de T^r défini par les r-tenseurs A vérifiant la condition

$$\delta' \{f \sigma (A)\} = 0$$

où σ est l'application antilinéaire définie par la dualité déterminée par la métrique et la conjugaison. Si $A \in U^r(f)$, $B \in U^s(f)$, on a $[A, B] = 0$ et $A \wedge B \in U^{r+s}(f)$.

La seconde partie du cours a été consacrée aux (l, n)-formes et (l, n)-tenseurs holomorphes. En introduisant une constante fondamentale $k(W, g)$, invariante par déformation kählerienne et liée à la moyenne de la courbure scalaire (ou à la trace d'un tenseur de Chern), nous montrons qu'on peut classer toutes les variétés kähleriennes en trois catégories selon le signe de k (W, g) ; ces catégories diffèrent par les propriétés de leurs plurigenres et plurigenres duaux et par l'annulation ou non des (l, n)-formes et (l, n)-tenseurs holomorphes. On en déduit en particulier que si l'un des plurigenres ou plurigenres duaux est $\neq 0$, le signe (+, 0 ou —) de k (W, g) ne dépend que de la structure complexe de la variété.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A. Série physique mathématique

Marle : Equation de Boltzmann relativiste.

Carter : Etoiles à neutrons.

Cissoko : Plasmas relativistes sans collisions : modèles de fluides anisotropes.

Hawking : Trous noirs et thermodynamique.

Flato : Vecteurs analytiques.

B. Série géométrie différentielle

Yano : Le groupe conforme en géométrie riemannienne.

Nomizu : Problèmes de plongement global.

Cahen : Nouveaux résultats sur les espaces pseudoriemanniens symétriques.

Pommaret : Pseudogroupes de transformations et physique mathématique.

Distinction

L'Académie polonaise des Sciences a décerné l'une des trois médailles créées en commémoration de Nicolas Copernic à M. André Lichnerowicz.

Missions et conférences

M. André Lichnerowicz a été professeur invité à la Rockefeller University de New York. Il a participé à l'Institut d'été de géométrie différentielle organisé à Stanford University par l'American Mathematical Society (juillet, août 1973). Sur invitation de l'Accademia Nazionale dei Lincei, il a donné une conférence générale au Colloque international de Rome en commémoration de Tullio Levi-Civita (décembre 1973). Il a participé au Colloque international sur la cohomologie des variétés feuilletées de Santiago (septembre 1973), à la Conférence internationale de physique mathématique de Varsovie (mars 1974) organisée par l'Académie polonaise des Sciences, au Colloque international C.N.R.S. sur les variétés symplectiques et leurs applications de Marseille (juin 1974), au Congrès Solvay de Bruxelles (septembre 1973). M. André Lichnerowicz a donné des conférences aux Universités d'Amsterdam, Liège, Varsovie, Bordeaux, Grenoble, Pau et à l'University of California.

PUBLICATIONS

André LICHNEROWICZ, *Cohomologie* 1-*différentiable d'algèbres de Lie associées à une variété symplectique* (*Comptes rendus Ac. Sc. Paris,* t. 277, p. 215-219).

— *Algèbre de Lie dynamique d'une variété unimodulaire* (*Ibidem,* t. 278, p. 431-434).

— *Automorphismes infinitésimaux d'une structure subordonnée à une structure unimodulaire* (*Ibidem,* t. 278, avril 1974, sous presse).

— *Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact* (*Journal de Math. pures et appl.,* t. 52, 1973, p. 473-508).

— *Ondes de choc gravitationnelles et électromagnétiques* (*Symposia Mathematica Ist. Naz. di Alta Matem.,* t. 12, 1973, p. 93-110).

R. J. IBRAHIM et André LICHNEROWICZ, *Tenseurs holomorphes sur une variété kählerienne compacte* (*Comptes rendus As. Sc. Paris,* t. 277, p. 801-805).