Professeurs associés

Chaire de Théorie des groupes

M. J. TITS, professeur associé chargé du cours

L'objet du cours était la théorie des immeubles et, plus particulièrement, la détermination des groupes d'automorphismes des immeubles de type sphérique ou affine et la classification des immeubles de type sphérique. Un séminaire, en marge du cours, a été consacré à la compactification des immeubles de type affine. La classification et les automorphismes des immeubles de type sphérique sont aussi le sujet du volume n° 386 des « Springer Lecture Notes » (voir liste de publications), volume désigné ci-dessous par [LN] ; dans le cours, les démonstrations de propositions reprises à [LN] ont souvent été omises de façon à faire plus de place aux résultats obtenus après l'achèvement de ces Notes.

1. *Immeubles*

Soit Δ un complexe simplicial dont les éléments (simplexes) maximaux, appelés *chambres*, ont tous même dimension, supposée finie. Les faces de codimension 1 d'une chambre sont ses *cloisons*, deux chambres ayant une cloison commune sont dites *adjacentes* et Δ est appelé un *complexe de chambres* si deux chambres quelconques peuvent être reliées par une suite de chambres telle que deux éléments successifs quelconques de la suite soient adjacents. Le complexe est *mince* si toute cloison appartient exactement à deux chambres (décomposition simpliciale d'une variété, par exemple), et *épais* si toute cloison appartient à trois chambres au moins.

Un *immeuble* est un complexe de chambres épais doté d'un *système d'appartements,* c'est-à-dire d'une famille $\mathcal{A}$ de sous-complexes minces (les « appartements ») telle que deux simplexes quelconques appartiennent à un même appartement et que, étant donnés deux appartements quelconques, il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre fixant leur intersection. Il s'avère que si le système $\mathscr{A}$ est en outre supposé maximal avec ces propriétés, alors il est unique (lorsqu'il existe) ; dans ce cas, l'immeuble est dit *complet*. Si les appartements sont des complexes finis, ce sont des sphères topologiques, et l'immeuble est appelé *(de type) sphérique*. Un immeuble sphérique est toujours complet (autrement dit, le complexe sous-jacent possède un seul système d'appartements).

Exemples. a) Le « complexe des drapeaux » d'un espace projectif P, c'est-à-dire le complexe dont les sommets sont les sous-variétés linéaires de P et dont les simplexes sont les drapeaux de P est un immeuble sphérique. Il en est de même du complexe des drapeaux totalement isotropes d'un espace vectoriel V doté d'une forme quadratique (ou, plus généralement, pseudo-quadratique : cf. [LN], § 8) ou d'une forme sesquilinéaire réflexive non dégénérée d'indice de Witt fini strictement positif, exception faite pour le cas d'une forme quadratique ordinaire (ou d'une forme symétrique) d'indice $\frac{1}{2}$ dim V.

b) Si G est un groupe algébrique semi-simple défini et isotrope sur un corps k, les k-sous-groupes paraboliques de G, ordonnés par la relation inverse de l'inclusion, sont les simplexes d'un immeuble sphérique.

c) Si G est un groupe algébrique quasi simple simplement connexe sur un corps $\mathfrak{p}$-adique k, les sous-groupes compacts maximaux de $G(k)$ sont les sommets d'un immeuble affine (cf. § 6).

Le double but poursuivi par le cours peut à présent être précisé. Il s'agissait :

1) de donner des propriétés simples et « naturelles » caractérisant les exemples a) et b) parmi tous les immeubles sphériques ;

2) d'établir des théorèmes généraux permettant la détermination commode du groupe des automorphismes Aut Δ pour une classe d'immeubles Δ comprenant tous les exemples précités.

Les réponses (en partie conjecturales) que nous avons apportées à ces questions font apparaître la théorie des immeubles sphériques comme une sorte de version combinatoire de la théorie des groupes classiques et des groupes algébriques simples isotropes.

2. *Immeubles et systèmes de Coxeter*

Soit $\Gamma = (W,S)$ un système de Coxeter (cf. N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. IV, p. 11) de rang Card S fini et, pour $S' \subset S$, soit $W_{S'}$ le groupe engendré par S'. Les classes latérales $w.W_{S'}$ ($w \in W$, $S' \subset S$), ordonnées par la relation inverse de l'inclusion, sont les simplexes d'un complexe de chambres mince $\Sigma(\Delta)$. On appelle *complexe de Coxeter* tout complexe isomorphe à un tel $\Sigma(\Gamma)$. Il s'avère que les appartements d'un immeuble sont toujours des complexes de Coxeter et, pour traiter simultanément des immeubles et des complexes de Coxeter, il est commode d'introduire la notion de *préimmeuble* : complexe de chambres doté d'un système d'appartements qui sont des complexes de Coxeter (ainsi, un immeuble est un préimmeuble épais).

A tout préimmeuble Δ, dont l'ensemble des chambres est noté Cham Δ, on associe *canoniquement* un système de Coxeter $\Gamma(\Delta) = (W(\Delta), S(\Delta))$ et une fonction « distance » d_Δ : Cham $\Delta \times$ Cham $\Delta \to W(\Delta)$ caractérisés par les propriétés suivantes :

si Σ est un appartement de Δ, $\Gamma(\Delta)$ s'identifie à $\Gamma(\Sigma)$ de telle façon que $d_\Sigma = d_\Delta \mid_{\text{Cham}\,\Sigma \times \text{Cham}\,\Sigma}$;

si $\Delta = \Sigma(\Gamma)$, on a $\Gamma(\Delta) = \Gamma$ — d'où Cham$\Delta = W$ — et $d_\Delta(w,w') = w^{-1}w'$.

Se donner un préimmeuble *complet* Δ revient à se donner le système $\Gamma = \Gamma(\Delta)$, l'ensemble Cham Δ et la fonction d_Δ (soumise à un système d'axiomes simple) ; les appartements de Δ correspondent aux parties de Cham Δ isométriques (pour d) au complexe de Coxeter $\Sigma = \Sigma(\Gamma)$. Le théorème suivant, établi au début du cours, a joué par la suite un rôle essentiel :

dans un préimmeuble complet Δ, *toute partie de* Cham Δ *isométrique* (*pour* d) *à une partie de l'ensemble des chambres de l'« appartement type »* Σ *est contenue dans un appartement.*

3. *La condition de Moufang*

Dans tout complexe de Coxeter Σ, on distingue certains sous-complexes appelés les *moitiés* de Σ (cf. [LF], où les moitiés sont appelées « roots » : si Σ est le complexe de Coxeter associé au groupe de Weyl d'un système de racines réduit, ses moitiés sont en correspondance biunivoque canonique avec les racines).

Soient Δ un immeuble sphérique et a une moitié d'appartement. Notons V_a le groupe des automorphismes de Δ fixant toute chambre ayant au moins une cloison contenue dans a mais non dans son bord ∂a. L'immeuble Δ est dit *de Moufang* si, pour tout a, le groupe V_a permute transitivement les appartements contenant a. La terminologie est suggérée par le fait que le complexe des drapeaux d'un plan projectif est de Moufang si et seulement si le plan lui-même est un plan de Moufang. La condition de Moufang est moins restrictive qu'il n'y paraît à première vue : on déduit assez aisément du théorème 4.1.2 de [LN] que *tout immeuble sphérique irréductible de rang (dimension* + 1) *au moins égal à* 3 *est de Moufang*

(un immeuble est dit irréductible si son système de Coxeter l'est) ; de plus, la traduction, résumée ci-dessous, de la condition de Moufang en termes de groupes montre que, même en rang 2, tous les immeubles sphériques « usuels » (exemples a) et b) du § 1) sont de Moufang (la réciproque est probablement vraie : cf. § 5).

Soient Γ un système de Coxeter fini ne possédant pas de facteur direct de rang 1, $\Sigma = \Sigma(\Gamma)$ le complexe de Coxeter correspondant, Ψ l'ensemble des moitiés de Σ et Ψ^+ l'ensemble des moitiés contenant une chambre donnée (« racines positives »). Pour $a,b \in \Psi$, soit $-a$ $(= \Sigma \backslash a \cup \partial a)$ l'opposée de a et, si $b \neq -a$, soit (a,b) l'ensemble des éléments de $\Psi - \{a,b\}$ contenant $a \cap b$. Soient G un groupe et $(U_a)_{a \in \Psi}$ un système de sous-groupes non réduits à l'élément neutre et satisfaisant aux conditions suivantes, où H désigne l'intersection des normalisateurs des U_a et r_a la réflexion associée à a (automorphisme de Σ fixant ∂a et permutant a et $-a$) :

(i) G est engendré par H et les U_a ;

(ii) pour $a,b \in \Psi$ et $b \neq -a$, le commutateur (U_a, U_b) est contenu dans le groupe engendré par les U_c, avec $c \in (a,b)$;

(iii) si $u \in U_a - \{1\}$, il existe $n \in U_{-a} u U_{-a}$ tel que $n U_b n^{-1} = U_{r_a(b)}$ pour tout $b \in \Psi$;

(iv) l'application produit $H \times \prod_{a \in \Psi^+} U_a \to G$ est injective (pour un ordre convenable des facteurs du produit).

Alors, il existe un immeuble de Moufang Δ, *une bijection* ι *de* Σ *sur un appartement de* Δ *et un homomorphisme* φ *de* G *dans le groupe* $\mathrm{Aut}^\circ \Delta$ *des automorphismes de* Δ *induisant l'identité sur son système de Coxeter, tels que* φ *applique* U_a *isomorphiquement sur* $V_{\iota(a)}$ *pour tout* $a \in \Psi$. *De plus,* Δ, ι, φ *sont uniques à isomorphisme près. Réciproquement, si* Σ *est un appartement d'un immeuble de Moufang* Δ, *les groupes* $G = \mathrm{Aut}^\circ \Delta$ *et* $\mathrm{U}_a = \mathrm{V}_a$ *satisfont aux conditions* (i) *à* (iv).

Ce résultat, qui établit le lien entre les immeubles de Moufang et une situation familière en théorie des groupes classiques et algébriques, a aussi d'autres conséquences intéressantes. On en déduit par exemple diverses présentations des groupes G en question (notamment, la généralisation à ces groupes d'un théorème bien connu de R. Steinberg).

4. *Automorphismes*

Il résulte *a priori* de la proposition précédente qu'on peut décrire un immeuble de Moufang par la donnée d'un système $(G;(U_a)_{a \in \Psi})$. En fait, la connaissance des seuls sous-groupes U_a pour $a \in \Psi^+$, au sein du groupe U^+ qu'ils engendrent, suffit à déterminer l'immeuble, comme le montre une construction explicite donnée dans le cours. Il s'ensuit aussitôt que

l'homomorphisme φ *du* § 3 *est un isomorphisme de* G *sur* $\mathrm{Aut}^\circ\Delta$ *si et seulement si* H *opère fidèlement sur* U^+ *(par automorphismes intérieurs) et s'il induit le groupe de tous les automorphismes de* U^+ *conservant chaque* U_a $(a \in \Psi^+)$.

On peut ainsi déterminer de façon élémentaire le groupe de tous les automorphismes d'un immeuble de Moufang quelconque. Pour illustrer ce procédé, on a établi dans le cours un « théorème de Chow-Dieudonné » sur les permutations des variétés linéaires d'une hyperquadrique qui conservent l'adjacence, dans le cas de formes (quadratiques, pseudo-quadratiques ou hermitiennes) d'indice de Witt 2, cas où la méthode de W. L. Chow et J. Dieudonné ne s'applique pas.

5. *Classification*

Conjecture. Les seuls immeubles de Moufang irréductibles de rang $r \geqslant 2$ sont ceux « que l'on connaît », à savoir, *grosso modo*, les immeubles associés aux groupes classiques et aux groupes algébriques de rang relatif r.

Cette conjecture est établie pour $r \geqslant 3$ (cf. [LN], sauf pour les types H_3 et H_4, traités dans le cours). Supposons $r = 2$ et soit $2m$ l'ordre du groupe de Weyl. Dans ce cas, la conjecture est vérifiée pour $m = 3$ (résultat classique), 5, 6 et 7. Au cours, la non-existence des « pentagones généralisés » de Moufang (cas $m = 5$) — dont découle celle des immeubles de type H_3 et H_4 — a été prouvée et on a, d'autre part, décrit explicitement tous les immeubles de Moufang de rang $\geqslant 2$ connus : il suffisait pour cela, vu le § 3, de donner pour chacun d'eux les relations de commutation entre les U_a $(a \in \Psi^+)$. Dans le cas le plus intéressant, celui des « octogones » ($m = 8$), cela nous a conduit à attribuer aux groupes de Ree de type ${}^2F_4$ un « système de racines non réduit » Π constitué par les 24 racines $(\pm 1,0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm 1))$, $(\pm \frac{1}{2}(\sqrt{2} \pm 1), \pm \frac{1}{2})$, moyennant quoi, les relations de commutation en question sont données par les « formules de Chevalley »

$$(u_a(t),\ u_b(t')) = \prod u_{pa+qb}(c_{a,b;p,q}\, t^p t'^q),$$

où $a,b,pa+qb \in \Pi$, $c_{a,b;p,q} = 0$ ou 1 (le plus souvent 1 !), $p,q \in \mathbf{N} + \mathbf{N}.\sqrt{2}$, et où un exposant $\sqrt{2}$ est à interpréter comme un endomorphisme du corps de base (de caractéristique 2), racine carrée de l'endomorphisme de Frobenius $x \mapsto x^2$.

6. *Immeubles affines. Compactification*

Soient Δ un immeuble complet et $\Gamma = (W,S)$ son système de Coxeter. Supposons le complexe de Coxeter $\Sigma(\Gamma)$ « réalisé géométriquement » comme décomposition simpliciale d'un ouvert dense Ω d'un espace topologique $\overline{\Omega}$ sur lequel W opère de façon compatible avec son opération sur $\Sigma(\Gamma)$. Un cas particulier important est celui où W est un groupe de Weyl affine irréductible, Ω l'espace affine où opère W et $\overline{\Omega}$ le compactifié de Ω par la « sphère à l'infini » ; nous l'appellerons « le cas affine irréductible ».

Supposons chaque simplexe du complexe abstrait Δ « réalisé » comme une copie de la facette de même type de la chambre fondamentale de $\Sigma(\Gamma)$. La réunion de ces « simplexes concrets » sera aussi notée Δ. Pour toute chambre $D \in \operatorname{Cham} \Delta$, l'application $E \to d_\Delta(D,E)$ de Cham Δ sur $W = \operatorname{Cham} \Sigma(\Delta)$ « se réalise » canoniquement comme une application surjective $\eta_D : \Delta \to \Omega$. Identifions Δ avec son image par l'application $\Pi \eta_D$ dans l'espace topologique $\prod_{\operatorname{Cham} \Delta} \overline{\Omega}$, et soient $\overline{\Delta}$ l'adhérence de Δ dans cet espace et $\tilde{\overline{\Delta}}$ la réunion des adhérences des appartements de Δ.

Dans le cas affine irréductible, $\Delta_\infty = \tilde{\overline{\Delta}} - \Delta$ *est un immeuble sphérique (retopologisé). L'homomorphisme canonique* Aut $\Delta \to$ Aut Δ_∞ *est injectif.*

Cela permet de déterminer aisément les groupes d'automorphismes des immeubles affines associés aux groupes algébriques simples sur les corps locaux (exemple c) du § 1).

Supposons le complexe Δ localement fini. Alors, l'ensemble A des appartements contenant une chambre donnée C a une structure évidente d'espace topologique compact. Sous certaines hypothèses simples concernant $\overline{\Omega}$, hypothèses toujours remplies dans le cas affine irréductible, le séminaire a montré que, pour tout appartement Σ contenant C, la restriction de η_C à Σ s'étend en un homéomorphisme ζ_Σ de $\overline{\Sigma}$ sur $\overline{\Omega}$, et que *l'application* $(\Sigma,x) \mapsto \zeta_\Sigma^{-1}(x)$ *de* $A \times \overline{\Omega}$ *dans* $\overline{\Delta}$ *est propre. En particulier,* $\overline{\Delta} = \tilde{\Delta}$ *et si* $\overline{\Omega}$ *est compact, il en est de même de* $\overline{\Delta}$. Nous retrouvons ainsi, par une voie différente, un résultat de A. Borel et J.-P. Serre.

Le lemme suivant, valable pour tout immeuble complet Δ, a été souvent utilisé dans les démonstrations et a sans doute un intérêt en soi :

Si C désigne une chambre donnée quelconque de Δ, tout appartement est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'appartements contenant C.

PUBLICATIONS

A. BOREL et J. TITS, *Homomorphismes « abstraits » de groupes algébriques simples* (*Annals of Math.*, 97, 1973, p. 499-571).

J. TITS, *Buildings of spherical types and finite* BN-*pairs* (*Lecture Notes in Math.*, n° 386, Springer Verlag, IX + 299 pp., 1974).

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Classification of generalized polygons and buildings (Congrès sur les Théories combinatoires, Accad. dei Lincei, Rome, septembre 1973).

Isotropiebedingungen in der Geometrie und der Kosmologie (Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Düsseldorf, novembre 1973).

Moufang Polygone (Université de Münster, mai 1974).