Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut

(Académie des Sciences), professeur

Après avoir été consacré antérieurement à l'étude des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique, puis à une variété de contact, le cours du *mardi* a porté cette année sur les algèbres de Lie attachées à une *variété unimodulaire* (W, η) où η est une forme élément de volume. On s'est efforcé de dégager analogies et différences entre les algèbres de Lie correspondant aux trois cas étudiés. On note L (resp. L_0) l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux X (resp. à support compact) d'une structure unimodulaire ; L^* (resp. L^*_0) est l'idéal de L défini par les champs de vecteurs X *exacts,* c'est-à-dire égaux à une divergence δ t d'un 2-tenseur contravariant antisymétrique t (resp. à support compact). On a établi, ce qui présente des difficultés techniques, que les algèbres de Lie L et L^* admettent L^* pour idéal dérivé, tandis que les algèbres de Lie L_0 et L^*_0 admettent L^*_0 pour idéal dérivé.

L'un des premiers objectifs du cours a été encore l'extension au cas des variétés unimodulaires des principaux résultats concernant les idéaux, obtenus antérieurement dans le cas des variétés symplectiques. Soit A une sous-algèbre de L contenant L^*_0. A tout ensemble fermé f de W, on associe l'idéal $I_c(f)$ de L défini par $X = \delta\, t$, où t est à support compact $S(t) \subset C f$. L'idéal $I_c(f)$ est dit l'idéal canonique associé à f. Si M est un sous-espace vectoriel de L admettant f pour fermé de nullité et invariant par $I_c(f)$, on a encore établi que

$$[M, I_c(f)] = I_c(f) \qquad\qquad I_c(f) \subset M$$

On en a déduit une étude générale des idéaux I de A et on a montré qu'ils sont tous *semi-simples* et de dimension infinie. De plus aucun idéal non trivial de A ne peut admettre un idéal supplémentaire dans A.

La situation générale est ainsi proche de celle concernant l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique. La méthode employée repose toujours sur un « lemme principal » de décomposition en somme finie de crochets ; mais, pour être adapté à l'étude des idéaux, ce lemme se présente ici comme devant être le plus raffiné des lemmes principaux correspondant aux quatre algèbres de Lie infinies classiques.

Après avoir étudié les idéaux, on a montré que les dérivations de l'algèbre de Lie L sont données par l'algèbre de Lie L^c des transformations infinitésimales conformes unimodulaires, c'est-à-dire celles qui reproduisent la forme élément de volume à un facteur constant près. La méthode mise en œuvre est un raffinement assez poussé de celle introduite par Floris Takens, pour montrer que les dérivations de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable sont toutes intérieures. Une telle méthode convient aux quatre cas classiques, mais se révèle plus lourde que celle que nous avons introduite pour les cas symplectiques et de contact.

Dans une dernière partie, on a introduit et étudié une algèbre de Lie nouvelle définie à partir des 2-tenseurs et notée N, que nous proposons d'appeler algèbre de Lie dynamique du cas unimodulaire, par analogie avec l'algèbre de Lie dynamique du cas symplectique définie à partir des parenthèses de Poisson sur les fonctions. En particulier, on a déterminé les dérivations de N et par suite son premier espace de cohomologie à valeurs dans l'algèbre de Lie N elle-même.

Le cours du *mercredi* a été consacré à l'étude des immersions holomorphes d'une variété complexe compacte dans un tore complexe et à l'étude correspondante des immersions minima d'une variété riemannienne compacte dans un tore réel. Le cas complexe a été récemment l'objet d'un travail de Matsushima, le cas réel a été étudié — par deux voies différentes — par Nagano-Smyth et par nous-mêmes.

Pour qu'une variété complexe compacte W admette une immersion holomorphe dans un tore complexe, il faut et il suffit que W admette une structure kählerienne et que son fibré holomorphe cotangent soit ample. S'il en est ainsi, l'application de Jacobi de W elle-même définit une immersion holomorphe de la variété dans son tore d'Albanese A (W). On doit noter que toute application holomorphe μ d'une variété kählerienne dans une autre, en particulier dans un tore complexe, est une application harmonique. Si μ est une immersion holomorphe de W dans un tore complexe, on obtient, en munissant W de la métrique kählerienne image réciproque de la métrique plate du tore, une *immersion minima* de la variété kählerienne dans le tore.

Nous avons ainsi été conduits à étudier les immersions harmoniques, et plus particulièrement les immersions minima d'une variété riemannienne compacte orientée (W, g) dans un tore réel (B, g_B). Comme nous l'avons montré en 1968, on peut attacher à la variété riemannienne compacte (W, g), au moyen des 1-formes harmoniques, un tore canonique et une application J qui sont les analogues réels de la variété d'Albanese et de l'application de Jacobi du cas complexe. Pour le problème des immersions harmoniques, ils jouent dans les deux cas un rôle identique.

Supposons qu'il existe une *immersion minima* μ d'une variété riemannienne compacte orientée (W, g) dans un tore plat (B, g_B). On a établi essentiellement les résultats suivants :

1) La variété (W, g) est une variété riemannienne analytique (théorème d'analyticité) ;

2) Le plus grand groupe connexe G_i d'isométries de (W, g) est un tore opérant librement sur W dont l'algèbre de Lie est définie par les champs de vecteurs à dérivée covariante nulle et dont les orbites sont parallèles dans (W, g). La courbure de Ricci de (W, g) est non positive ; μ définit un homomorphisme de groupe $\hat{\mu} : G_i \to B$ de noyau fini et $\hat{\mu}\,(G_i)$ est un sous-tore de B ;

3) Pour l'action de G_i, (W, g) est un fibré principal en tores sur une variété riemannienne compacte (W_1, g_1), où $W_1 = W/G_1$ et où g_1 est la métrique quotient. L'application μ induit une immersion minima μ_1 de (W_1, g_1) dans le tore $B_1 = B/\hat{\mu}\,(G_i)$. Le plus grand groupe connexe d'isométries de (W_1, G_1) est réduit à l'identité (théorème de réduction).

Le résultat le plus délicat à établir est le suivant : si (W, g) est une variété riemannienne compacte admettant une immersion minima dans un tore plat, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) G_i est réduit à l'identité ; b) le tenseur de Ricci de g est défini négatif sur un ouvert partout dense de W.

Nous avons établi ce résultat par une méthode différente de celle esquissée par Nagano-Smyth et qui se révèle plus puissante et plus simple.

En appliquant ces différents résultats au cas holomorphe, on obtient le corollaire suivant : soit W une variété complexe compacte à fibré holomorphe cotangent ample et admettant une structure kählerienne. Sa première classe de Chern est non positive. Le plus grand groupe connexe G de transformations holomorphes de W est un tore complexe opérant librement sur W. La variété quotient $W_1 = W/G$ est une variété complexe compacte dont le fibré holomorphe cotangent est ample et qui admet une structure kählerienne pour laquelle le tenseur de Ricci est défini négatif sur un ouvert partout dense de W_1. Le groupe connexe G_1 de transformations holomorphes de W_1 est réduit à l'identité.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

Werle, *Une approche de la théorie quantique des champs* ;

Ruffini, *Mécanismes de création d'ondes gravitationnelles et électromagnétiques au voisinage d'un trou noir* ;

Tulczycev, *Différentielle de Lagrange* ;

L. Bel, *Nouvelles recherches en mécanique prédictive relativiste* ;

G. Rideau, *Représentations indécomposables en théorie quantique des champs* ;

A. Taub, *Classes de Pontrjagin et spineurs en relativité générale.*

Missions et conférences

M. André Lichnerowicz a été professeur invité à l'University of Maryland durant les mois de septembre, octobre et novembre 1974, ainsi qu'à l'Université de Florence pendant le mois de mars 1975. Il a été conférencier à l'Ecole d'été de géométrie différentielle organisée à l'University of Durham par la London Mathematical Society (juillet 1974). Il a participé au Symposium international sur les applications des mathématiques pures à la mécanique organisé à Lecce, conjointement par l'Université de Rome et l'Académie polonaise des Sciences (mai 1975). Sur invitation du comité international d'organisation, il a donné une conférence générale au Congrès international sur l'enseignement des mathématiques qui s'est tenu à Tokyo en novembre 1974. M. André Lichnerowicz a donné des conférences à Harvard University, Princeton University, au Massachussets Institute of Technology, à l'University of Pennsylvania, à la Rockefeller University et à la Tokyo University, aux Universités de Dijon, Limoges et Nantes.

Publications

André Avez, André Lichnerowicz et A. Diaz-Miranda, *Sur l'algèbre des automorphismes infinitésimaux d'une variété symplectique* (*Journ. of Diff. Geometry*, t. 9, p. 1-40, 1974).

André LICHNEROWICZ, *Algèbres de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire* (*Ann. Inst. Fourier,* t. 24, p. 219-266, 1974).

— *Cohomologie 1-différentiable des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact* (*J. de Math. pures et appliquées,* t. 53, p. 458-484, 1974).

— *Dérivations et cohomologies des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique et à une variété de contact* (*Coll. Int. C.N.R.S.*, Aix, juin 1974).

— *Variétés canoniques et transformations canoniques* (*Comptes rendus Ac. Sc. de Paris,* t. 280, série A, p. 37-40, 1975).

— *Variété symplectique et dynamique associée à une sous-variété* (*Ibidem,* t. 280, série A, p. 523-527, 1975).

M. FLATO, A. LICHNEROWICZ et D. STERNHEIMER, *Déformations 1-différentiables d'algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact* (*Ibidem,* t. 279, série A, p. 877-881, 1974).