Théorie des groupes

M. Jacques TITS, professeur

Le cours avait pour objet les groupes algébriques réductifs sur un corps valué et, plus particulièrement, l'existence d'immeubles associés à ces groupes. Une démonstration d'existence par descente galoisienne fait intervenir certains schémas en groupes dont l'étude — plus approfondie qu'il n'était strictement nécessaire pour les applications qu'on avait en vue — a constitué un sujet secondaire du cours. Les résultats exposés ont, pour la plupart, été obtenus en collaboration avec F. Bruhat ; ils font l'objet d'un travail en cours de publication dont le premier chapitre, noté ici [Ch. I], a paru aux Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. (vol. 41 (1972), 5-251).

1. *Existence de l'immeuble*

1.1. *Notations et généralités.* Soient K un corps commutatif muni d'une valuation ω de hauteur un, $\mathscr{G}$ un groupe semi-simple défini sur K, $\mathscr{S}$ un tore déployé maximal de $\mathscr{G}$, $X^*(\mathscr{S})$, $\mathscr{Z}$ et $\mathscr{N}$ respectivement le groupe des caractères, le centralisateur et le normalisateur de $\mathscr{S}$, V' l'espace vectoriel $X^*(\mathscr{S}) \otimes \mathbf{R}$, V son dual, $\Phi \subset V'$ le système des racines relatives de $\mathscr{G}$ par rapport à $\mathscr{S}$ et, pour $a \in \Phi$, $\mathscr{U}_a$ le sous-groupe unipotent connexe de $\mathscr{G}$ normalisé par $\mathscr{S}$ et dont l'algèbre de Lie est la somme des espaces propres correspondant à a et $2a$ dans Lie $\mathscr{G}$. Posons $\mathscr{G}(K) = G$, $\mathscr{S}(K) = S$, etc. Pour $u \in U_a - \{1\}$, $N \cap U_{-a}uU_{-a}$ se compose d'un seul élément noté $m(u)$. Pour $a \in \Phi$, choisissons dans N un élément m_a dont l'image dans le groupe de Weyl est la réflexion associée à a. Soit χ un caractère de $\mathscr{Z}$ dont la restriction à $\mathscr{S}$ est un multiple ca de a, avec $c > 0$; alors

il existe un K-polynôme $\lambda_\chi : \mathscr{U}_a \to \mathscr{A}dd$ tel que $\chi(m(u).m_a) = \lambda_\chi(u)$ pour $u \in U_a - \{1\}$; pour $z \in Z$, on a $\lambda_\chi({}^z u) = \chi(z)^{2c}.\lambda_\chi(u)$.

La plus petite valeur possible de c (donc le « degré » du polynôme « naturellement » associé à a) se « lit » aisément sur le diagramme (indice) associé à $\mathcal{G}$ selon les Tables II de l'article *Classification of algebraic semi-simple groups* (Proc. Symp. Pure Math. A.M.S., vol. 9 (1966), 33-62), noté ci-dessous [Class]. On voit que la fonction $\varphi_a = \frac{1}{2c} \cdot (\omega \circ \lambda_\chi) : U_a \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ ne dépend pas de χ et que les fonctions φ_a correspondant à des choix différents de m_a sont égales à une constante additive près.

1.2. *Immeuble.* Soit X le groupe des caractères rationnels de $\mathcal{Z}$. Le groupe Hom(X, $\mathbf{R}$) s'identifie à V. Il existe alors une paire (A, ν), unique à isomorphisme unique près, formée d'un espace affine A sous V et d'un homomorphisme ν de N dans le groupe des transformations affines de A tel que, pour $z \in Z$, $\nu(z)$ soit l'élément v de V défini par $v(\chi) = - 2\omega(\chi(z))$ pour $\chi \in X$. Le noyau H de ν est l'intersection des noyaux des homomorphismes $\omega \circ \chi : Z \to \mathbf{R}$ pour $\chi \in X$. Le choix d'un sous-groupe fini N_0 de N tel que $N = N_0 Z$ permet d'identifier A à V de telle façon que l'unique point fixe de N_0 dans A soit identifié à 0. Si en outre les m_a du n° 1.1 sont pris dans N_0 et si A est doté d'une métrique euclidienne invariante par N, $\nu(m(u))$ est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan
$\{x \in A \mid a(x) + \varphi_a(u) = 0\}$.

On appelle *immeuble* de $\mathcal{G}$ sur K un espace métrique I contenant A (comme sous-espace métrique euclidien), sur lequel G opère comme groupe d'isométries de telle façon que :

— N stabilise A et opère sur lui par ν ;

— $I = \bigcup_{g \in G} gA$;

— une partie Y de G est bornée (*i.e.* $\omega(f(Y))$ est borné pour toute fonction régulière f sur $\mathcal{G}$) si et seulement si Yx est borné pour $x \in I$ (cette condition est évidemment indépendante du choix de x) ;

— pour $a \in \Phi$ et $u \in U_a$, u fixe le demi-espace $\{x \in A \mid a(x) + \varphi_a(u) \geqslant 0\}$.

Cet immeuble, qui est unique *s'il existe*, possède des propriétés géométriques remarquables et joue un rôle important dans diverses questions (cf. [Ch. I] et le texte, à paraître, de la conférence au Congrès de Vancouver citée dans les « Missions et conférences »). Les *appartements* de I sont, par définition, les transformés de A par les éléments de G.

1.3. *Conditions d'existence de l'immeuble. Une conjecture.* Pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, posons $U_{a,k} = \{u \in U_a \mid \varphi_a(u) \geqslant k\}$. On vérifie aisément que les trois conditions suivantes sont nécessaires à l'existence de l'immeuble ;

les résultats de [Ch. I] montrent qu'elles sont aussi suffisantes (dans [Ch. I], la propriété (iii) est aussi postulée pour $a = b$, mais on peut voir que les conséquences qui nous intéressent ici sont indépendantes de cette hypothèse) :

(i) H est borné ;

(ii) $U_{a,k}$ est un groupe quels que soient a et k ;

(iii) si $a,b \in \Phi$ sont deux racines non proportionnelles et si $k,l \in \mathbf{R}$, le commutateur $(U_{a,k}, U_{b,l})$ est contenu dans le groupe engendré par les $U_{pa+qb,pk+ql}$ où $p,q \in N - \{0\}$ et $pa + qb \in \Phi$.

CONJECTURE. *Si K est complet, les assertions* (i), (ii), (iii) *sont vraies* (*donc* $\mathcal{G}$ *possède un immeuble sur K*).

(Cette conjecture peut encore s'énoncer comme ceci : *pour K quelconque,* $\mathcal{G}$ *possède un immeuble sur K si et seulement s'il a même rang sur K et sur son complété.*) Dans un exposé de séminaire faisant suite au cours, G. Rousseau a montré que

la condition (i) *est satisfaite si K est hensélien.*

D'autres propositions (beaucoup plus faciles) de nature générale ont été établies dans le cours :

(ii) *est vrai si K est complet et si* $2a \notin \Phi$; (iii) *est vrai si a et b appartiennent à une même base de* Φ ; (ii) *et* (iii) *sont vrais si* $\mathcal{G}$ *est déployé sur K.*

1.4. *Vérification directe de la conjecture.* En principe, il doit être possible de vérifier la conjecture « cas par cas », par des calculs directs, en utilisant la classification de [Class]. Dans le cours, cette méthode a été appliquée, à titre d'exemples, à divers types de groupes comprenant notamment tous les groupes classiques (cf. aussi [Ch. I], § 10), les groupes quasi-déployés et les groupes simples dont le système de racines relatif n'est pas de type BC_1 ou BC_2 (en particulier, les groupes simples de rang relatif au moins trois).

1.5. *Démonstration par descente galoisienne.* Une autre façon d'aborder la conjecture consiste, sachant que $\mathcal{G}$ possède un immeuble I_L sur une extension galoisienne finie L de K (supposé complet), à essayer de « construire l'immeuble I au sein de I_L ». Une version simplifiée du théorème de descente du § 9 de [Ch. I] peut s'énoncer ainsi :

Soit $\mathcal{Z}'$ *le groupe dérivé de* $\mathcal{Z}$. *Supposons que* $\mathcal{G}$ (*et par conséquent* $\mathcal{Z}'$) *possède un immeuble sur L et que le groupe de Galois* Gal(L/K) *ait un seul* *point fixe dans l'immeuble de $\mathscr{Z}'$ sur L. Alors, $\mathscr{G}$ possède un immeuble sur K.*

Lorsque $\mathscr{Z}' = \{1\}$, on retrouve un résultat déjà évoqué en 1.4 :

Sur un corps complet, tout groupe quasi-déployé possède un immeuble.

Pour illustrer le théorème de descente ci-dessus, on a traité dans le cours l'exemple des groupes de type ${}^6D^9_{4,1}$ (notation de [Class]) qui deviennent de type ${}^3D^2_{4,2}$ après une extension quadratique non ramifiée du corps de base. A la fin du cours, utilisant une forme plus précise du théorème de descente de [Ch. I] et les résultats dont il sera question au § 2 (notamment en 2.4), on a démontré le théorème suivant :

Soient ω discret et K complet. Supposons $\mathscr{G}$ quasi-déployé sur une extension galoisienne non ramifiée L de K. Alors, l'ensemble des points fixes de Gal(L/K) *dans l'immeuble de $\mathscr{G}$ sur L est un immeuble de $\mathscr{G}$ sur K.*

(N.B. Utilisant la forme simple du théorème de descente énoncée plus haut, G. Rousseau a pu montrer, plus généralement, que si K est complet et si $\mathscr{G}$ possède un immeuble sur une extension modérément ramifiée de K, il en possède un sur K.)

Le théorème précédent et un résultat bien connu de R. Steinberg entraînent aussitôt que

la conjecture du n° 1.3 *est vraie lorsque la valuation ω est discrète, à corps résiduel parfait.*

2. *Schémas en groupes*

2.1. *Anneau quelconque.* Soient $\mathfrak{o}$ un anneau intègre, K son corps des quotients, $\mathscr{G}$ un groupe algébrique semi-simple déployé sur K et $\overline{\mathscr{G}}$ son groupe adjoint. On définit $\mathscr{S}$, $\mathscr{N}$, Φ, $\mathscr{U}_a$ comme en 1.1 et on se donne une « base de Chevalley » $(e_a)_{a\in\Psi}$ dans Lie $\mathscr{G}$. Soient $m_{a,b;i}$, pour $i \in \mathbf{N}$ et $a, b, ia + b \in \Phi$, les entiers tels qu'on ait « universellement »

$$(\exp \operatorname{ad} e_a)(e_b) = \Sigma \pm m_{a,b;i}\, e_{ia+b}$$

et soit Ψ' une fonction de Φ dans l'ensemble des idéaux fractionnaires inversibles de $\mathfrak{o}$ telle que, pour a, b, i comme ci-dessus, on ait

$\Psi'(ia + b) \supset m_{a,b;i}\, \Psi'(a)^i\, \Psi'(b)$. Appelons $\mathfrak{o}$*-forme* d'un K-schéma en groupes $\mathscr{H}$, tout $\mathfrak{o}$*-schéma* en groupe $\mathscr{H}_{\mathfrak{o}}$ doté d'une identification $\mathscr{H} \to \mathscr{H}_{\mathfrak{o}} \otimes K$

(par abus de notation, nous désignons ainsi l'opération de changement de base). Soit $\mathscr{S}_{\mathfrak{O}}$ (resp. $\overline{\mathscr{S}}_{\mathfrak{O}}$) le $\mathfrak{O}$-tore déployé — unique à isomorphisme unique près — qui est une $\mathfrak{O}$-forme de $\mathscr{S}$ (resp. de l'image canonique de $\mathscr{S}$ dans $\overline{\mathscr{G}}$). Le choix de e_a détermine une identification de $\mathscr{U}_a$ avec le groupe additif (sur K) ; soit $\mathscr{U}_{a,\Psi}$ la $\mathfrak{O}$-forme de $\mathscr{U}_a$ qui, moyennant cette identification, devient le schéma en groupes additif du $\mathfrak{O}$-module $\Psi(a)$. Un des buts de cette partie du cours était de munir le produit direct

$$\mathscr{C}_{\Psi} = \prod_{a<0} \mathscr{U}_{a,\Psi} \times \mathscr{S}_{\mathfrak{O}} \times \prod_{a>0} \mathscr{U}_{a,\Psi}$$

(pour un ordre choisi dans Φ) d'une structure de « noyau de groupe » et, éventuellement, d'« intégrer » ce noyau en une $\mathfrak{O}$-forme de $\mathscr{G}$. La méthode de C. Chevalley (Séminaire Bourbaki, mai 1961, exposé 219), adaptée par F. Bruhat, conduit au lemme fondamental suivant.

Soient M_{Ψ} le sous- -module de Lie $\overline{\mathscr{G}}$ *engendré par* Lie $\overline{\mathscr{S}}_{\mathfrak{O}}$ *et les $\Psi(a)e_a$, $\varrho : \mathscr{G} \to \mathscr{G}\mathscr{L}(V)$ une représentation de $\mathscr{G}$ dans un espace vectoriel V de dimension finie, ϱ_1 la représentation naturelle de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{G}\mathscr{L}(\mathrm{Lie}\,\overline{\mathscr{G}})$ et M un sous-$\mathfrak{O}$-module projectif de type finie de V engendrant V. Supposons que la représentation $\varrho \oplus \varrho_1$ de $\mathscr{G}$ soit fidèle et que restrictions de ϱ à $\mathscr{S}$ et aux $\mathscr{U}_a$ se prolongent en des morphismes de $\mathscr{S}$ et des $\mathscr{U}_{a,\Psi}$ dans $\mathscr{G}\mathscr{L}(M)$. Alors, la restriction de $\varrho \oplus \varrho_1$ à $\mathscr{C}_{\Psi} \otimes K$ se prolonge en une immersion de $\mathscr{C}_{\Psi}$ dans $\mathscr{G}\mathscr{L}(M \oplus M_{\Psi})$ dont l'image $\mathscr{C}'$ est un « sous-noyau de groupe » (c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $\mathscr{D}$ de la section unité dans $\mathscr{C}'$ telle que l'application produit de $\mathscr{G}\mathscr{L}(M \oplus M_{\Psi})$ restreinte à $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ se factorise à travers $\mathscr{C}'$). La structure de « noyau de groupe » ainsi définie, par transport de structure, sur $\mathscr{C}_{\Psi}$, ne dépend pas de ϱ.*

Des exemples donnés dans le cours montrent que l'adhérence schématique de $\mathscr{C}'$ dans $\mathscr{G}\mathscr{L}(M \oplus M_{\Psi})$, qui est aussi l'image fermée de $\mathscr{G}$ par ϱ dans $\mathscr{G}\mathscr{L}(M \oplus M_{\Psi})$, n'est pas nécessairement un schéma en groupes. Mais c'en est évidemment un lorsque $\mathfrak{O}$ est un anneau de valuation.

2.2. *Anneau de valuation.* Il serait intéressant de classer toutes les $\mathfrak{O}$-formes lisses de $\mathscr{G}$ ayant $\mathscr{C}_{\Psi}$ pour noyau de groupe (et plus généralement, toutes les $\mathfrak{O}$-formes lisses de $\mathscr{G}$ « contenant $\mathscr{S}_{\mathfrak{O}}$ »). Lorsque $\mathfrak{O}$ est un anneau de valuation, la réponse à cette question est donnée par les théorèmes suivants, où W désigne le groupe de Weyl de $\mathcal{G}$, $\hat{N}_{\Psi}$ le groupe des éléments de $N = \mathcal{N}(K)$ qui permutent entre eux les $\Psi(a)e_a$, $W_{\Psi} \subset W$ le groupe engendré par les réflexions par rapport aux racines a telles que $\Psi(a)\ \Psi(-a) = \mathfrak{o}$ et ν_0 l'homomorphisme canonique de N sur W.

Le noyau de groupe $\mathcal{C}_{\Psi}$ *s'« intègre » de façon unique en une* $\mathfrak{o}$*-forme* $\hat{\mathcal{G}}_{\Psi}$ *de* $\mathcal{G}$ *telle que le normalisateur* $\hat{\mathcal{N}}_{\Psi}$ *de* $\mathcal{S}_{\mathfrak{o}}$ *dans* $\hat{\mathcal{G}}_{\Psi}$ *ait pour groupe des points entiers* $\hat{\mathcal{N}}_{\Psi}(\mathfrak{o}) = \hat{N}_{\Psi}$. *Tout isomorphisme local d'une* $\mathfrak{o}$*-forme de* $\mathcal{G}$ *sur* $\hat{\mathcal{G}}_{\Psi}$ *se prolonge en une immersion ouverte de cette* $\mathfrak{o}$*-forme dans* $\hat{\mathcal{G}}_{\Psi}$. *Les sous-schémas en groupes ouverts de* $\hat{\mathcal{G}}_{\Psi}$ *sont en correspondance canonique bijective avec les sous-groupes de* $\nu_0(\hat{N}_{\Psi})$ *contenant* W_{Ψ}, *correspondance donnée par* $\mathcal{G}_1 \rightarrow \nu_0(N \cap \mathcal{G}(\mathfrak{o}))$. *En particulier, la composante neutre* $\mathcal{G}_{\Psi}$ *de* $\hat{\mathcal{G}}_{\Psi}$ *correspond à* W_{Ψ}.

(Des suggestions de M. Raynaud ont permis de simplifier sensiblement la démonstration de ce théorème.)

2.3. *Liens avec l'immeuble.* Reprenons les hypothèses et notations de 1.1. On suppose en outre le groupe $\mathcal{G}$ déployé et la valuation ω discrète, d'anneau , d'idéal $\mathfrak{p}$ et de corps résiduel k. A toute partie bornée Ω d'un appartement de l'immeuble I, on associe une $\mathfrak{o}$-forme $\mathcal{G}_{\Omega}$ de $\mathcal{G}$: si $\Omega \subset A$, $\mathcal{G}_{\Omega}$ est le schéma $\mathcal{G}_{\Psi}$ (notation de 2.2) correspondant à la fonction $\Psi : a \rightarrow \{x \in K \quad \omega(x) \geqslant - a(\Omega)\}$. On montre que

$\mathcal{G}_{\Omega}$ *ne dépend pas de l'appartement* A *(c'est-à-dire du tore* $\mathcal{S}$*) choisi ; si* $\mathcal{G}$ *est simplement connexe,* $\mathcal{G}_{\Omega}(\mathfrak{o})$ *est le fixateur de* Ω *dans* G.

Si Ω' est une partie de Ω ou, plus généralement, de son adhérence, on définit de façon évidente un morphisme canonique $\alpha_{\Omega\Omega'} : \mathcal{G}_{\Omega} \rightarrow \mathcal{G}_{\Omega'}$. Notons $\mathcal{G}_{\Omega,k}$ et $\alpha_{\Omega\Omega',k}$ les « réductions mod. $\mathfrak{p}$ » de $\mathcal{G}_{\Omega}$ et de $\alpha_{\Omega\Omega'}$. Si Ω est une facette F de I, le groupe $\mathcal{G}_{\Omega,k}$ décrit la structure locale de l'immeuble au voisinage de F :

pour toute facette F' *contenant* F *dans son adhérence, le groupe* $\mathcal{P}_{F'} = \alpha_{F'F,k}(\mathcal{G}_{F',k})$ *est un* k*-sous-groupe parabolique de* $\mathcal{G}_{F,k}$ *et l'application* $\mathcal{P}_{F'} \rightarrow F'$ *est un isomorphisme de l'immeuble sphérique de* $\mathcal{G}_{F,k}$ *sur* k *sur le « link » de* F *dans* I.

2.4. *Groupes quasi-déployé.* Des recherches en cours (en collaboration avec F. Bruhat) ont pour but d'étendre les résultats précédents aux groupes quasi-déployés. Dans le cours, on s'est borné, pour ce cas, à associer à toute facette F de l'immeuble un k-groupe algébrique « relativement semi-simple » (c'est-à-dire, ne possédant pas de k-sous-groupe distingué unipotent de dimension strictement positive) dont l'immeuble sphérique (convenablement défini) est canoniquement isomorphe au « link » de F. Ce résultat a été utilisé pour établir le théorème principal du n° 1.5.

***

Un séminaire a été consacré à quelques résultats récents de la théorie des groupes finis deux fois transitifs. Il a consisté en les exposés suivants :

J. Tits, *Introduction ; énumération des groupes deux fois transitifs connus.*

M. Enguehard, *Groupes sporadiques deux fois transitifs* (3 exposés).

S. Dixmier, *Groupes strictement deux fois transitifs* (2 exposés).

J. Tits, *Groupes de permutations tels que le stabilisateur de tout point possède un sous-groupe distingué simplement transitif* (2 exposés).

Z. Nouacer, *Travaux de O'Nan sur les groupes doublement transitifs* (2 exposés).

Publications

J. Tits, *Homomorphismes « abstraits » de groupes de Lie* (*Istituto Naz. Alta Mat., Symposia Math.*, 13, 1974, p. 479-499).

S. Koppelberg et J. Tits, *Une propriété des produits directs infinis de groupes finis isomorphes* (*C. R. Acad. Sci. Paris,* 279, 1974, A 583-585).

Missions et conférences

Cours : *Generalized polygons* (Conference on Fondations of Geometry, Toronto, juillet-août 1974).

Exposés :

— *Quadratic forms and the geometry on quadrics* (même Conférence) ;

— *On buildings and their applications* (« Expository address » au Congrès international des Mathématiciens, Vancouver, août 1974) ;

— *Moufang Polygone* (Tübingen, novembre 1974) ;

— *Automorphismes des groupes classiques de rang 1 et de géométries associées* (Groupe de contact : « Algèbre et Logique » du Fonds national belge de la Recherche scientifique, Louvain, mai 1975) ;

— *Automorphisme von Quadriken* (Bielefeld, juin 1975).