Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mardi* a été consacré à l'étude de la *cohomologie adjointe 1-différentiable* relative aux algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact.

Soit (W, F) une variété symplectique de dimension 2 n, de 2-forme fondamentale F. On désigne par μ l'isomorphisme de fibrés vectoriels $TW \rightarrow T^*W$ défini par F ; cet isomorphisme s'étend naturellement aux tenseurs et l'on pose $G = \mu^{-1}(F)$. On note L l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales symplectiques (champs localement hamiltoniens) de (W, F), L^* l'idéal défini par les champs globalement hamiltoniens ($L^* = [L, L]$), N l'algèbre de Lie dynamique de la variété définie sur l'espace des fonctions à valeurs réelles par le crochet de Poisson. On s'intéresse à la cohomologie de chacune de ces algèbres, à valeurs dans cette algèbre elle-même, correspondant à la représentation adjointe (cohomologie adjointe). C'est cette cohomologie qui intervient dans la définition des dérivations et des déformations des algèbres de Lie. On a essentiellement déterminé cette cohomologie pour les complexes définis par les cochaînes 1-différentiables.

Pour l'algèbre de Lie N, le cobord relatif à ce complexe s'exprime aisément en termes du crochet de Schouten-Nijenhuis. Il en résulte que la cohomologie envisagée est isomorphe à la suivante : une p-cochaîne est un couple (α, β) d'une p-forme α et d'une $(p - 1)$-forme β et le cobord est donné par :

$$\partial(\alpha, \beta) = (- d\alpha + F \wedge \beta, d\beta)$$

On en déduit la cohomologie cherchée en termes de la cohomologie de De Rham et dc l'action de l'opérateur e ([F]) défini, sur les classes de cohomologie de formes, par le produit extérieur par F. On démontre de plus qu'il existe une structure naturelle d'algèbre de cohomologie. Les résultats obtenus sont, bien entendu, en accord avec ceux provenant de la détermination antérieure directe (Avez et Lichnerowicz) des dérivations de l'algèbre.

En ce qui concerne L, on a démontré que les cochaînes 1-différentiables étaient définis, pour $p \neq 1$, par :

$$\mu^{-1} \{d(\alpha(X_1, \ldots X_p))\} \quad (X_1, \ldots, X_p \in L)$$

où α est une p-forme ; elles sont à valeurs dans L*. Pour $p = 1$, il convient d'ajouter à de telles 1-cochaînes, les cochaînes $X \to KX$, où K est une constante. Les cochaînes 1-différentiables relatives à L* sont les restrictions à L* des précédentes. On a déduit de ces résultats et de la détermination de la cohomologie de N, la cohomologie adjointe 1-différentiables de L et L*.

On sait qu'à toute variété de contact (W, ω), on peut associer de manière naturelle une structure symplectique sur $W \times R$. On déduit de l'étude précédente que la cohomologie adjointe 1-différentiable de l'algèbre de Lie L_c des transformations infinitésimales de contact est toujours triviale.

Ces résultats permettent d'aborder l'étude des *déformations* formelles des différentes algèbres de Lie envisagées et d'établir en particulier la rigidité des déformations infinitésimales de l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales de contact.

Après avoir rappelé, en les complétant sur les points nécessaires, les éléments de la théorie algébrique des déformations de Gerstenhaber, on s'est borné à étudier en détail les déformations formelles de l'algèbre de Lie dynamique N d'une variété symplectique. Outre les déformations triviales, il existe ici des déformations géométriquement inessentielles, provenant des déformations formelles de la structure symplectique. On a montré que, pour de larges classes de variétés symplectiques, il existe des déformations formelles essentielles de l'algèbre N. On a même pu mettre en évidence, sous des hypothèses assez générales, l'existence de déformations à l'ordre 1 qui sont rigoureuses. De tels résultats seront interprétés ultérieurement en termes de Physique mathématique.

Le cours du *mercredi* a porté sur la mise en évidence de formalismes hamiltoniens invariants et sur la notion de *variété canonique.* On a montré que si une variété symplectique exacte (W, ω) admet un champ de vecteur fondamental dont les orbites définissent une submersion sur l'espace quotient $\hat{W}$, celui-ci est naturellement muni d'une structure de contact $\hat{\omega} = o$. Il existe par projection un isomorphisme de l'algèbre de Lie $L\omega$ des automorphismes infinitésimaux de (W, ω) sur celle $\hat{L}$ de la structure de contact.

La géométrie d'un système dynamique à n degrés de liberté et liaisons dépendant du temps peut être défini par le fibré $\mathscr{F}$, de dimension $(2n + 1)$, des directions de covecteurs de l'espace-temps de configuration M. Relativement au fibré cotangent de M privé de sa section nulle, soit W, et à $\mathscr{F}$, la situation est celle qui a été analysée et $\mathscr{F}$ admet une structure de contact naturelle $\hat{\omega} = o$. Les trajectoires du système dynamique sont définies par les orbites des champs de vecteurs $\hat{X}$ de l'algèbre de $\hat{L}$ie L d'automorphismes infinitésimaux correspondants. Le formalisme qui dérive de la structure de contact se révèle fort peu maniable.

Par contre une trajectoire du système dynamique est la projection sur $\mathscr{F}$ d'orbites dans W du champ de vecteur $\hat{X} \in L_{\omega}$ qui se projette sur X. On en déduit que ces trajectoires peuvent être définies à partir d'une fonction hamiltonienne globale de W, homogène et de degré 1 par rapport aux covecteurs, le paramètre étant l'action usuelle. On a ainsi élaboré un formalisme hamiltonien invariant, relativement à tout repérage de l'espace-temps de configuration. Ceci diffère du point de vue développé naguère par Dirac.

Dans un tel contexte, la notion de transformation canonique peut trouver son véritable cadre géométrique de la manière suivante : soit (W, F) une variété symplectique de dimension $(2\,n + 2)$ et soit $t : W \rightarrow R$ une projection temporelle globale (partout de rang 1) dont le vecteur hamiltonien P associé à des orbites définissant une submersion sur l'espace quotient $\tilde{W}$; $\tilde{W}$ est muni d'un 2-tenseur $\tilde{G}$ (projection de G) vérifiant $[\tilde{G}, \tilde{G}] = o$, au sens du crochet de Schouten. Plus généralement $(\tilde{W}, \tilde{G}, \tilde{t})$ de dimension $(2\,n + 1)$, où le 2-tenseur $\tilde{G}$ vérifie $[\tilde{G}, \tilde{G}] = o$ et le scalaire $\tilde{t}$ vérifie $[\tilde{G}, \tilde{t}] = o$ est une *variété canonique*. Une telle variété est feuilletée en variétés symplectiques de dimension 2 n, le feuilletage étant défini par l'équation globale $\tilde{t} = o$. On peut appeler transformation canonique, une transformation de $\tilde{W}$ qui est un automorphisme de la structure canonique. On a montré en quel sens ces transformations canoniques sont une généralisation des transformations canoniques classiques.

A une variété canonique sont attachées des algèbres de Lie de dimension infinie, de manière analogue à ce qui se passe pour une variété symplectique. On a analysé la structure de ces algèbres de Lie, étudié leurs idéaux et déterminé complètement leurs *dérivations*. On constate que méthodes et résultats sont proches de ceux concernant les algèbres de Lie attachées à une variété symplectique, le rôle joué par les constantes étant joué ici par l'anneau des fonctions de $\tilde{t}$.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A - Physique mathématique

S. R. de Groot, Energie-impulsion relativiste d'un système matériel et électromagnétique. Théories microscopiques et macroscopiques.

B. Carter, Hydrodynamique relativiste : approche hamiltonienne des notions de tourbillon, hélicité et superfluidité.

N. Sanchez, Théorie de la diffusion et problème d'absorption d'ondes par un trou noir.

N. O'Murchadha, Structure of space-like infinity.

G. Boillat, Chocs caractéristiques pour les champs dérivant d'un principe variationnel.

K. Bleuler, Géométrie et théorie d'Hamilton-Jacobi.

D. Kastler, Algèbres d'opérateurs et états d'équilibre en mécanique statistique.

C. Isham, Quantum field theoretic aspects of the canonical quantization of gravity.

B. de Witt, Quantum problems in curved Space-Time.

M. Stora, Géométrie des champs de jauge.

Ch. van Weert, Quantum Mechanics foundation of relativistic kinetic theory.

B - Géométrie différentielle

J. Szenthe, Topological characterization of transitive Lie group actions.

M. Cahen, Automorphismes de fibrés principaux et théorie de Yang-Mills.

Distinction

M. André Lichnerowicz a été élu associé étranger de l'Académie royale de Belgique.

Missions et conférences

M. André Lichnerowicz a été professeur invité à l'Université de Rome (mars 1976) et à l'Université de Turin (mai 1976). Il a présidé le symposium international sur les méthodes de géométrie différentielle en physique et mécanique organisé à Varsovie par l'Académie polonaise des Sciences (juin 1976). Il a été conférencier invité au Colloque international Marcel Grossmann organisé par le Centre international de Physique théorique de Trieste (juillet 1976) et au Colloque international de Physique mathématique organisé à Mexico (janvier 1976) par l'Université nationale au Mexique et l'Université du Texas. Il a participé au Colloque international sur les méthodes de quantification de Bonn (juillet 1975), aux journées relativistes de Bruxelles (avril 1976) et aux journées de géométrie différentielle de Marseille-Lumigny (juin 1976). Il a donné des conférences à la Rockefeller University, à l'Ecole Normale Supérieure de Pise et à l'Université de Louvain-la-Neuve.

Publications

André Lichnerowicz, *Structures de contact et formalisme hamiltonien invariant* (*Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. 281, p. 171-176).

— *Algèbre de Lie des champs de vecteurs : cohomologie 1-différentiable et déformations* (*Ibidem*, t. 281, p. 507-512).

— *Ondes de choc, sous des hypothèses générales, en magnétohydrodynamique relativiste* (*Ibidem*, t. 281, p. 723-728).

— *Ondes de choc gravitationnelles et ondes de choc magnétomatérielles* (*Ibidem*, t. 281, p. 929-934).

— *Fibré canoniques, structures unimodulaires exactes et algèbres de Lie d'automorphismes infinitésimaux* (*Ibidem*, t. 282, p. 283-287).

— *Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs* (*Comm. Math. Helv.*, à paraître).

— *Variétés symplectiques et variétés canoniques* (*Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics Symposium de Lecce* (mai 1975), Pitman Publ., London, 1976).

M. Flato, A. Lichnerowicz et D. Sterheimer, *Déformations of Poisson brackets, Dirac brackets and Applications* (*J. of Mathem. Physics*, à paraître).