Théorie des groupes

M. Jacques Tits, professeur

Le cours a été consacré aux résultats de G. A. Margulis annoncés au dernier Congrès international des Mathématiciens (Vancouver, 1974, pp. 21-34 du vol. 2 des Actes du Congrès) et concernant les célèbres conjectures de A. Selberg et I. I. Pyateckii-Šapiro sur l'arithméticité des sous-groupes discrets de covolume fini irréductibles dans les groupes de Lie réels semi-simples de rang réel $\geqslant 2$ et, plus généralement, la S-arithméticité, sous des conditions analogues, de sous-groupes discrets de covolume fini dans les produits directs de groupes de Lie réels et p-adiques (voir le Corollaire du § 2 pour un énoncé précis).

La communication de Margulis au Congrès ne donne que des esquisses de preuves et on s'est proposé de reconstituer sur cette base, dans la mesure du possible, des démonstrations complètes des principaux résultats. Ce programme a pu être entièrement mené à bien pour les sous-groupes discrets cocompacts (cas en fait le plus intéressant du point de vue de la nouveauté puisque pour les sous-groupes non cocompacts, on disposait déjà, du moins dans le cas *réel*, d'une autre démonstration, due aussi à Margulis et publiée celle-là, de la conjecture de Selberg).

1. *Superrigidité*

Notons P l'ensemble formé des nombres premiers et du symbole ∞. Soit I un ensemble fini non vide. Pour $i \in \mathrm{I}$, soient p_i un élément de P et $\mathcal{G}_i$ un groupe algébrique défini et simple sur $k_i = \mathbf{Q}_{p_i}$ ($= \mathbf{R}$ si $p_i = \infty$) (ici, « simple » est pris au sens strict et implique donc « adjoint »). Posons $\mathrm{G} = \prod \mathcal{G}_i(k_i)$ et notons pr_i la projection canonique de G sur le i-ième facteur $\mathcal{G}_i(k_i)$. Enfin, soit Γ un sous-groupe de G.

Nous inspirant d'une terminologie de G. D. Mostow, nous disons que Γ est *superrigide* (dans G) si pour tout corps localement compact non discret k, tout groupe algébrique absolument simple $\mathcal{H}$ défini sur k et tout homomorphisme $\alpha : \Gamma \to \mathcal{H}(k)$ à image Zariski-dense et non relativement compacte pour la topologie ordinaire, il existe $i \in I$, une injection continue $\varphi : k_i \to k$ et, moyennant identification de k_i à $\varphi(k_i)$, un k-homomorphisme $\beta : \mathcal{G}_i \to \mathcal{H}$ tels que $\alpha = \beta \circ \mathrm{pr}_i$. Le théorème fondamental de Margulis peut alors s'énoncer comme suit :

THÉORÈME 1. — *Supposons Γ discret et de covolume fini dans* G. *Supposons en outre que, pour tout i tel que $\mathrm{rg}_{k_i} \mathcal{G}_i = 1$, le groupe $\mathrm{pr}_i\Gamma$ soit non discret. Alors, Γ est superrigide.*

La démonstration de ce théorème sous l'hypothèse supplémentaire que Γ est *cocompact* a occupé la majeure partie du cours.

2. *Arithméticité*

Soient $\mathcal{H}$ un groupe semi-simple adjoint défini sur $\mathbf{Q}$, A l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$ et Ω un sous-groupe ouvert de $\mathcal{H}(A)$ de la forme $\Omega = \prod_{p \in P} \Omega_p$ avec $\Omega_p \subset \mathcal{H}(\mathbf{Q}_p)$. Autrement dit, Ω_p est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{H}(\mathbf{Q}_p)$ égal pour presque tout p à $\mathcal{H}(\mathbf{Z}_p)$ pour une $\mathbf{Z}$-structure arbitrairement choisie sur $\mathcal{H}$. Supposons en outre que pour tout $\mathbf{Q}$-sous-groupe distingué non trivial $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1(A) \cap \Omega$ soit non compact.

On appelle généralement « sous-groupe S-arithmétique » de $\mathcal{H}(\mathbf{Q})$ tout sous-groupe d'indice fini d'un sous-groupe de la forme $\mathcal{H}(\mathbf{Q}) \cap \Omega$, où Ω est comme ci-dessus (pour voir le lien avec la définition habituelle, il faut tenir compte du fait que tout sous-groupe ouvert de $\mathcal{H}(\mathbf{Q}_p)$ est d'indice fini dans le produit d'un facteur direct de $\mathcal{H}(\mathbf{Q}_p)$ et d'un sous-groupe compact ouvert du facteur direct complémentaire). Il sera commode ici de modifier légèrement cette terminologie en incluant dans la définition un plongement du sous-groupe en question dans un groupe localement compact. Plus précisément, reprenons les notations du § 1 et soit $\gamma : \mathcal{H}(A) \to G$ un homomorphisme surjectif continu dont la restriction à Ω est propre. Il résulte de la « théorie de la réduction » de A. Borel et Harish-Chandra que $\gamma(\mathcal{H}(\mathbf{Q}) \cap \Omega)$ est un sous-groupe discret de G de covolume fini dans le sous-groupe ouvert $\gamma(\Omega)$. Nous dirons qu'un sous-groupe de G est S-*arithmétique standard* s'il est de la forme $\gamma(\mathcal{H}(\mathbf{Q}) \cap \Omega)$ avec $\mathcal{H}$, Ω et γ comme ci-dessus, et qu'il est *de type* $\mathcal{H}$ si, de plus, Ker γ ne contient $\mathcal{H}_1(A)$ pour aucun $\mathbf{Q}$-sous-groupe distingué non trivial $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$. Enfin, nous appellerons *sous-groupe* S-*arithmétique* de G tout sous-groupe d'indice fini d'un sous-groupe S-arithmétique standard.

La démonstration du théorème suivant ne présente pas de grande difficulté.

THÉORÈME 2. — *Soient* $\mathcal{G}_i$ *et* G *comme au* § 1. *Pour* $p \in P$, *notons* $\mathcal{G}_{(p)}$ *le produit des* $\mathcal{G}_i$ *tels que* $p_i = p$. *Enfin, soit* Δ *un sous-groupe de* G *superrigide, de type fini, et dont la projection dans* $\mathcal{G}_{(p)}(\mathbf{Q}_p)$ *soit Zariski-dense pour tout* p. *Alors :*

(i) *Il existe un groupe semi-simple adjoint* $\mathcal{H}$ *défini sur* $\mathbf{Q}$ *et un monomorphisme* $\iota : \Delta \to \mathcal{H}(\mathbf{Q})$ *tels que, pour tout corps* k, *tout groupe semi-simple adjoint non trivial* $\mathcal{L}$ *défini sur* k *et tout homomorphisme* $\alpha : \Delta \to \mathcal{L}(k)$ *à image Zariski-dense, on ait* car $k = 0$, *d'où* $\mathbf{Q} \subset k$ *à identification canonique près, et* α *se factorise de façon unique à travers un* k*-homomorphisme* $\beta : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ (i.e. $\alpha = \beta \circ \iota$). *Le couple* $(\mathcal{H}, \iota)$ *est unique à isomorphisme unique près et* $\iota(\Delta)$ *est Zariski-dense dans* $\mathcal{H}$.

(ii) *Pour* $\mathcal{H}$ *comme en* (i), Δ *est contenu dans un sous-groupe* S*-arithmétique standard de type* $\mathcal{H}$ *de* G.

Les conjectures de Selberg et de Pyateckiĭ-Šapiro sont à présent des conséquences faciles des théorèmes 1 et 2 et de propriétés connues des sous-groupes discrets de covolume fini. De façon précise, on a le :

COROLLAIRE. — *Soit* Γ *un sous-groupe discret de covolume fini dans un sous-groupe ouvert de* G. *Pour* $p \in P$, *soit* $\mathcal{G}'_{(p)}$ *le produit des* $\mathcal{G}_i$ *tels que* $p_i = p$ *et que* $\mathrm{pr}_i\Gamma$ *soit relativement compact dans* $\mathcal{G}_i(k_i)$. (On note que si Γ est de covolume fini dans G et si G est sans facteur direct compact, alors $\mathcal{G}'_{(p)}$ est trivial pour tout p.) *Supposons que pour tout* i *tel que* $\mathrm{rg}_{k_i}\, \mathcal{G}_i = 1$, $\mathrm{pr}_i\Gamma$ *soit non discret, et que pour tout* p, *la projection de* Γ *dans* $\mathcal{G}'_{(p)}(\mathbf{Q}_p)$ *soit Zariski-dense (ce qui revient à dire que son adhérence pour la topologie ordinaire est ouverte dans* $\mathcal{G}'_{(p)}(\mathbf{Q}_p)$). *Alors,* Γ *est un sous-groupe* S*-arithmétique de* G.

En effet, Γ est superrigide en vertu du théorème 1, il est de type fini d'après des résultats de H. Garland, M. S. Raghunathan, D. A. Každan et A. Borel, et une extension facile du « théorème de densité » de A. Borel montre que sa projection dans $\mathcal{G}_{(p)}(\mathbf{Q}_p)$ est Zariski-dense pour tout p. Les hypothèses du théorème 2 sont donc satisfaites pour $\Delta = \Gamma$.

3. *Le théorème ergodique multiplicatif*

L'un des ingrédients essentiels de la démonstration du théorème 1 par Margulis est le « théorème ergodique multiplicatif » de V. I. Oseledec (Trudy Mosk. Mat. Obšč. 19 (1969), 179-210). Dans le cours, on a présenté, en la simplifiant et la précisant sur quelques points, une démonstration inédite de ce théorème due à M. S. Raghunathan (pendant l'exposé, d'autres simplifications ont été suggérées par P. Deligne).

Soient B un espace muni d'une mesure de probabilité μ, V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps localement compact non discret de caractéristique zéro, $s : B \times V \rightarrow B \times V$ une application de la forme $(x,v) \mapsto (\bar{s}(x), s_x(v))$, où $\bar{s}$ est un automorphisme ergodique de (B,μ) et $x \mapsto s_x$ une application mesurable de B dans GL(V). Pour tout entier z, posons $s^z(x,v) = (\bar{s}^z(x), (s^z)_x(v))$. Soit V doté d'une norme « standard » (euclidienne, unitaire, ou borne supérieure de valeurs absolues de coordonnées) (1) et supposons que les fonctions $x \mapsto \log \|s_x\|$ et $x \mapsto \log \|(s^{-1})_x\|$ appartiennent à L^1. On a alors le :

THÉORÈME 3. — *Il existe un ensemble* X *tel que* B — X *soit négligeable pour* μ *et que les assertions suivantes soient vraies pour tout* $x \in X$:

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \log \|(s^n)_x\|$ *existe et ne dépend pas de* x ;

(ii) *si* $v \in V$, $c(x,v) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \log \|(s^n)_x(v)\|$ *existe* ;

(iii) *pour* $\lambda \in \mathbf{R}$, *le sous-espace* $V(x,\lambda) = \{v \in V \mid c(x,v) < \lambda\}$ *de* V *est fonction mesurable de* x *et sa dimension* $r(\lambda)$ *ne dépend pas de* x ;

(iv) *si* $s_y \in SL(V)$ *pour tout* $y \in B$ *et si*

$$\limsup_{n \to \infty} \int_B \frac{1}{n} \log \|(s^n)_y\| \, d\mu(y) > 0,$$

alors $0 < r(0) < \dim V$.

La première assertion est due à H. Furstenberg. Les trois autres, qui s'en déduisent assez facilement, comme le montre Raghunathan, constituent le théorème d'Oseledec dont il a été question plus haut.

Séminaire

Dans deux exposés intitulés : *Non-existence de certaines extensions transitives*, on a indiqué quelques principes permettant de montrer facilement que certains groupes de permutations « usuels » ne possèdent pas d'extension transitive. La méthode décrite redonne la plupart des résultats figurant dans la littérature sur ce sujet et s'applique aussi à de nombreux autres cas,

(1) Dans les applications — à la démonstration du théorème 1 notamment —, $B \times V$ est souvent remplacé par un fibré vectoriel de base B. Cette situation n'est pas essentiellement plus générale que celle envisagée ici, car un tel fibré est toujours trivialisable pour les structures qui nous importent. Mais lorsqu'on considère un fibré, il est nécessaire de se donner sur les fibres un système de normes « cohérent », en un sens à préciser. C'est là l'un des points où la compacité de G/Γ, qui est la base B dans l'application au théorème 1, a été utilisé de façon essentielle dans le cours : dans le cas non cocompact, le choix des normes en question ne semble pas évident.

par exemple à « presque tous » les groupes de permutations de la forme (G, G/P), où G est le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple isotrope sur un corps et P le groupe des points rationnels d'un sous-groupe parabolique propre.

PUBLICATIONS

J. TITS, *On buildings and their applications* (*Proc. Intern. Congress Math.*, Vancouver, 1974, vol. 1, 209-220 (1975)).

— *Leçon inaugurale de la chaire de Théorie des groupes,* janvier 1975 (1976).

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Exposés :

— *Rigidity*. Colloque à l'occasion du 70e anniversaire de H. Freudenthal, Utrecht, septembre 1975.

— *Travaux de Margulis sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie,* Séminaire Bourbaki, février 1976.

— *Polygones de Moufang et groupes algébriques simples de rang 2,* Colloquium de Mathématiques des universités parisiennes, mars 1976.

— *Groupes d'automorphismes d'arbres,* Grenoble, avril 1976.

— *Poligoni generalizzati.* Quatre exposés au Centro Linceo Interdisciplinare di Scienze Matematiche e loro Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, avril 1976.

Codirection avec T.A. Springer (Utrecht) d'un Colloque sur les *Groupes algébriques,* Oberwolfach, juin 1976.