Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mardi* a été consacré à la caractérisation des fibrés vectoriels et à un certain nombre d'applications à des structures géométriques réelles ou complexes. On sait qu'en 1968, Nagano a donné une caractérisation des fibrés vectoriels réels en tant que variété différentiable munie d'un champ de vecteurs fondamental Z à partir des singularités de ce champ. Il est à noter qu'une partie notable des démonstrations de Nagano était confuse et ne se présentait pas de manière totalement convainquante.

On a commencé par placer l'important « théorème de Nagano » sur des bases solides à partir d'un lemme principal qui, à partir de l'introduction d'une connexion, repose sur un théorème de Friedrichs concernant certaines singularités de systèmes différentiels. La caractérisation des couples (W, Z) d'une variété différentiable et d'un champ de vecteurs que l'on a ainsi obtenue permet la caractérisation des isomorphismes de fibrés vectoriels comme difféomorphismes de W préservant le champ fondamental Z.

Etant donnée une variété différentiable S de dimension s, le fibré vectoriel $T^{*q}(S)$ des q-formes de S a été étudié en ces termes. Un tel fibré admet une q-forme canonique ω. L'algèbre de Lie L_ω des champs de vecteurs de $W = T^{*q}(S)$ qui préservent ω est isomorphe par projection à l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de S. L'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de $T^{*q}(S)$, qui n'est autre que l'algèbre de Lie L_Z des champs de vecteurs de $T^{*q}(S)$ laissant Z invariant a pu être décomposée et l'on a pu établir, par des raisonnements non triviaux, que L_Z coïncide avec son idéal dérivé.

Si V est un vecteur tangent à $W = T^{*q}(S)$, l'application $V \rightarrow i(V)d\omega$ dans l'espace des q-formes est injective ; elle n'est bijective que pour $q = 1$ et $q = s$, c'est-à-dire pour le fibré cotangent T^*S et pour le fibré canonique KS. Le premier correspond à l'existence d'une structure symplectique exacte, le second à l'existence d'une structure unimodulaire exacte.

On déduit alors du théorème de Nagano une caractérisation des fibrés cotangents comme variété symplectique exacte (W, ω) de dimension $2s$, où ω est une 1-forme telle que $d\omega$ soit symplectique ; ω définit par $i(Z)d\omega = \omega$ un champ de vecteurs fondamental Z.

Si (W, Z) vérifie les hypothèses de Nagano pour une sous-variété S des singularités de dimension s, (W, ω) admet une structure unique de fibré cotangent T^*S telle que ω soit la 1-forme canonique.

On s'est proposé de transposer ces considérations au cas complexe. A cet effet, on a établi un théorème de caractérisation des fibrés vectoriels holomorphes en tant que variété complexe munie d'un champ holomorphe fondamental Z. On a d'autre part analysé les notions de structure symplectique complexe exacte (W, ω) et de structure de contact complexe et dégagé leurs principales propriétés. Soit (W, ω) une variété symplectique complexe exacte de champ fondamental Z ; si le feuilletage complexe donné par Z définit une submersion holomorphe, la projection $p : W \to \hat{W}$ sur l'espace quotient définit sur $\hat{W}$ une structure naturelle de contact complexe ; toute variété de contact complexe peut être interprétée comme variété quotient d'une variété symplectique complexe exacte. La projection détermine un isomorphisme de l'algèbre de Lie L_ω des automorphismes infinitésimaux de (W, ω) sur l'algèbre de Lie $\hat{L}$ des automorphismes infinitésimaux de la variété de contact complexe.

Des résultats parallèles peuvent être développés pour les structures unimodulaires, en particulier les structures unimodulaires exactes. On a donné, dans les cas réel et holomorphe, une caractérisation des fibrés canoniques en tant que variétés unimodulaires exactes (W, ω, Z). L'algèbre de Lie L_ω des automorphismes d'une variété unimodulaire exacte est isomorphe à une algèbre de Lie définie naturellement en termes de 2-tenseurs contravariants antisymétriques. A l'aide de cette représentation, on a établi que la projection déterminée par Z définit un isomorphisme de l'algèbre de Lie L_ω des automorphismes infinitésimaux sur l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de la variété quotient. Les rapports entre les quatre grandes structures dont les automorphismes infinitésimaux définissent les algèbres de Lie infinies classiques, apparaissent ainsi sous un jour nouveau.

*
**

Le cours du *mercredi* a porté sur une approche géométrique nouvelle de la quantification en termes de déformation de structures algébriques au sens de Gerstenhaber. Cette approche a été développée récemment par nos collaborateurs Bayen, Flato, Fronsdal, Sternheimer et par nous-mêmes dans différents articles. On s'est limité ici aux systèmes dynamiques à liaisons indépendantes du temps et à un nombre fini n de degrés de liberté. Dans le formalisme hamiltonien classique, la géométrie du système est décrite par son espace de phase, variété symplectique (W, F) de dimension 2n et sa dynamique par l'hamiltonien classique H qui détermine un champ de vecteurs hamiltonien X_H, automorphisme infinitésimal de la structure symplectique. Le mouvement d'un système dynamique classique est donné, par définition, par les trajectoires de X_H dans l'espace de phase. D'un autre point de vue, si N est l'espace des fonctions sur W à valeurs réelles, le mouvement est décrit par l'évolution en fonction du temps t d'une fonction u_t (observable classique) dans l'espace N. Cet espace est ainsi muni de deux structures algébriques, une *structure d'algèbre associative* (N,.) définie par le produit usuel des fonctions (ici commutatif) et une *structure d'algèbre de Lie* (N, {,}) définie par le crochet de Poisson $P(u, v) = \{u, v\}$, où P est un opérateur bidifférentiel d'ordre 1. La dynamique classique est décrite entièrement en termes de ces deux structures, convenablement connectées par une relation de dérivation.

On s'est proposé d'étudier s'il est possible de déformer d'une manière souhaitable ces deux structures de manière à obtenir un modèle isomorphe à la mécanique quantique usuelle. Les premiers résultats obtenus dans cette voie se sont révélés entièrement positifs.

On a d'abord rappelé et adapté les éléments principaux de la théorie de Gerstenhaber concernant les déformations des structures algébriques, essentiellement ici les structures d'algèbre associative et d'algèbre de Lie. Dérivations et déformations d'algèbres de Lie procèdent d'une même cohomologie, la cohomologie à valeurs dans l'algèbre de Lie elle-même correspondant à la représentation adjointe que nous avons nommée cohomologie de Chevalley. Celle-ci a été étudiée dans des cours antérieurs et adaptée à l'étude des déformations 1-différentielles de l'algèbre de Lie de Poisson. De la même façon dérivations et déformations d'algèbres associatives procèdent d'une cohomologie dite de Hochschild qui a été explicitée et étudiée. Cela fait, on s'est intéressé à un très important exemple de déformation différentielle introduit récemment par Jacques Vey. Notre point de vue a différé sensiblement de celui de Vey.

On sait qu'une variété symplectique (W, F) admet une infinité de connexions symplectiques, connexions linéaires sans torsion sur le fibré principal symplectique. On a étudié le cas d'une variété symplectique *plate* (W, F, Γ), où Γ est une connexion symplectique sans courbure. On peut définir dans ce cas, de manière naturelle, à partir de la connexion, des puissances symboliques $P^r (r \geq 0)$ de l'opérateur de Poisson P ; ces opérateurs bidifférentiels sont d'ordre maximum r en chaque argument. Un problème naturel est le suivant : donnons-nous une fonction formelle f(z) à coefficients constants ; peut-on choisir f de façon qu'en substituant P^r à z^r dans le développement de $f(\nu z)$, on obtienne en termes du paramètre de déformation ν, une déformation associative de l'algèbre (N, .). On a montré qu'il existe une fonction formelle unique (à un facteur constant près et à un changement linéaire près du paramètre de déformation) du crochet de Poisson P qui engendre une déformation associative : c'est la fonction exponentielle. On définit ainsi à partir de

$$(1) \qquad u *_\nu v = \sum_{r=o}^{\infty} (\nu^r / r\,!)\, P^r(u, v) = \exp(\nu P)(u, v)$$

une structure d'algèbre associative sur l'espace E(N ; ν) des fonctions formelles en ν à coefficients dans N. On en déduit par antisymétrisation

$$(2) \qquad [u, v]_{\nu 2} = \sum_{r=o}^{\infty} (\nu^{2r}/(2r+1)\,!)\, P^{2r+1}(u, v) = \nu^{-1}\, sh(\nu P)(u, v)$$

qui définit sur E(N ; ν^2) une structure d'algèbre de Lie ; on a établi pour (2) un autre théorème d'unicité. Il est remarquable que pour $\nu = i\hbar/2$, (2) fournit un crochet introduit en 1949 par Moyal dans le contexte de la quantification de Hermann Weyl-Wigner. Le terme en ν de (1), soit P, définit un 2-cocycle de Hochschild qui ne saurait être exact. De même le terme en ν^2 de (2), soit P^3, définit un 2-cocycle de Chevalley, dont on a établi qu'il ne peut, lui non plus être exact. De plus P^3 définit une 2-classe de cohomologie β qui est un générateur du second espace $H^2(N)$ de cohomologie de Chevalley qui est de dimension 1. Ainsi les deux déformations (1) et (2) ne sont jamais triviales même à l'ordre 1.

On s'est efforcé de généraliser cette situation à des variétés symplectiques non plates. En ce qui concerne les déformations de l'algèbre de Lie de Poisson, Jacques Vey a récemment établi pour les variétés à $b_3(W)$ nul un important théorème d'existence à partir d'une longue et fine étude cohomologique utilisant les résultats de Gelfand-Fuks. Nous avons exposé ce théorème et nous avons approfondi l'étude du premier terme non trivial Q^3 (qui généralise P^3), dont la connaissance est la clé nécessaire à l'obtention de résultats plus fins. Les difficultés concernant l'existence de déformations associatives ont été analysées.

L'interprétation physique des résultats obtenus a été esquissée. Nous comptons approfondir cette approche dans un cours ultérieur.

A. L.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A - Physique mathématique

J.-E. Segal, Théorie quantique des champs.

M. Zoravski, Non holonomie dans la théorie des champs.

C. van Calck, Représentations d'algèbres de Lie de champs de vecteurs.

Bonnor, Problèmes de mécanique relativiste.

Christodolou, Une approche de la quantification du champ gravitationnel.

B - Géométrie différentielle

M. Cahen, Domaines symétriques des quadriques projectives et généralisation.

Vranceanu, Sous-variétés affines.

J. Szenthe, Espaces homogènes et connexions invariantes.

A. Gray, Equations elliptiques et géométrie kählerienne.

Missions et conférences

M. André Lichnerowicz a été professeur invité à l'University of California at Berkeley (janvier, février, mars 1978) et à l'Université de Turin (juin 1978). Il a donné un cycle de conférences au Centre interdisciplinaire sur les mathématiques et leurs applications de l'Accademia dei Lincei (Rome mai 1978) et une conférence générale à la Réunion des mathématiciens d'expression latine (Palma octobre 1977). Il a été conférencier invité aux Journées franco-belges de Géométrie différentielle organisées par l'Université de Lille (avril 1978) et au colloque international C.N.R.S. de Physique Mathématique de Marseille (mai 1978). Il a participé au colloque international sur les méthodes mathématiques en mécanique qui s'est tenu en Pologne (septembre 1977) et aux Journées relativistes franco-suisses organisées par l'Université de Genève (avril 1978). Il a donné des conférences à l'University of Maryland, à l'Université de Bonn et à l'Université de Milan.

A. LICHNEROWICZ, *Construction of twisted products for cotangent bundles of classical groups and Stiefel manifolds* (Lett. in Mathematical Physics 2, 1977, p. 133-143).

— *Variétés de Jacobi et algèbres de Lie associées* (Comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 285, A, 1977, p. 455-461).

— *Dérivations et automorphismes pour des algèbres formelles associées par déformation à une variété symplectique* (Ibidem, t. 286, A, 1978, p. 49-53).

F. BAYEN, M. FLATO, C. FRONSDAL, A. LICHNEROWICZ, D. STEINHEIMER, *Quantum Mechanics as a deformation of classical mechanics* (Lett. in Mathem. Phys., t. I, 1977, p. 521-530).

— *Deformation theory and quantization* (Ann. of Phys. 1978, p. 61-152).