Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Dans un cours antérieur (1976-1977), nous avions introduit et étudié une généralisation contravariante naturelle de la notion de variété symplectique : *les variétés de Poisson.* Cette notion apparaît dans l'étude géométrique des transformations canoniques et semble la clé d'un certain nombre des résultats de la théorie de Kirilov-Kostant-Souriau.

Dans le cours du *mardi,* nous avons introduit une généralisation contravariante analogue de la notion de variété de contact : *les variétés conformes de Jacobi.* Soit W une variété différentiable de dimension m et posons $N = C^\infty(W ; \mathbb{R})$. Un opérateur bidifférentiel antisymétrique $P : N \times N \rightarrow N$, d'ordre maximum 1 en chaque argument est donné par :

$$P(u, v) = i(\Lambda)(du \wedge dv) + ui(E)(dv) - vi(E)\,du \quad (u, v \in N)$$

où Λ est un 2-tenseur (contravariant antisymétrique) et E un vecteur ; pour que P vérifie l'identité de Jacobi, il faut et il suffit qu'au sens des crochets de Schouten :

$$\text{(I)} \qquad [E, \Lambda] = 0 \qquad\qquad [\Lambda, \Lambda] = 2\,E \wedge \Lambda$$

Une structure de variété de Jacobi est définie sur W par le couple d'un 2-tenseur Λ de rang constant 2n et d'un vecteur E tel que $E \wedge \Lambda^n \neq 0$, tous deux vérifiant (I) ; P définit alors sur N une structure d'algèbre de Lie dite de Jacobi. (W, ,E) est dite de codimension $l = m - (2n + 1)$. Une variété pfaffienne de dimension $(2n + 1)$ est une variété de Jacobi de codimension 0. Une variété de Jacobi admet un feuilletage naturel de codimension l par des variétés pfaffiennes.

A la notion de structure de contact (définie par une structure pfaffienne) correspond celle de structure conforme de Jacobi. Pour qu'il existe une structure de Jacobi sur W induisant une structure conforme de Jacobi, il faut et il suffit qu'un fibré convenable défini par la structure soit trivial. Nous notons L_C l'algèbre des transformations infinitésimales (t.i.) conformes de Jacobi, par L l'idéal L_C défini par les t.i. tangentes au feuilletage en variétés de contact ; L est isomorphe à l'algèbre de Lie de Jacobi (N, P) par l'isomorphisme σ défini de la manière suivante :

$$\sigma : X \in L \to u \in N \text{ tel que } X \wedge \Lambda^n = u E \wedge \Lambda^n$$
$$\sigma^{-1} : u \in N \to X = u E + [\Lambda, u] \in L$$

Les dérivations des algèbres de Lie (N, P) ont été déterminées et l'on a établi que ces algèbres coïncident avec leurs idéaux dérivés. Toute dérivation de L_C est intérieure.

Un théorème de « rigidité » a pu être établi en ce qui concerne l'algèbre de Lie de Jacobi : toute déformation 1-différentiable de l'algèbre de Lie (N, P) est différentiablement triviale. Les résultats précédents contiennent comme cas particuliers beaucoup des résultats concernant les variétés de contact. Le théorème de rigidité s'il est étendu à une différentiabilité arbitraire correspond à un théorème analogue que nous avons démontré en ce qui concerne l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs d'une variété différentiable.

*
**

Le cours du *mercredi* a approfondi l'analyse de l'approche de la Mécanique quantique en termes de *déformations* des algèbres associatives et de Lie (algèbre de Poisson) attachées à une variété symplectique. Les grandes lignes de cette théorie avaient été développées dans le cours antérieur. On note Symp (W, F) le groupe de tous les symplectomorphismes d'une variété symplectique (W, F) et Symp_c (W, F) sa composante de l'identité *connexe par arcs différentiables par morceaux*. Une algèbre associative formelle (ou $*_\nu$-produit) est définie sur l'espace E (N ; ν) des fonctions formelles de $\nu \in C$ à coefficients dans $N = C^\infty(W ; R)$ à partir de :

$$(1) \qquad u *_\nu v = u.v + \nu \{u, v\} + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r (C_r(u, v) \qquad (u, v \in N)$$

où les C_r sont des 2-cochaînes différentielles de Hochschild nulles sur les constantes ; les $C_r(u, v)$ sont supposées symétriques en u, v pour r pair, antisymétriques pour r impair. Par antisymétrisation, on en déduit une algèbre de Lie formelle définie par :

$$(2) \qquad [u, v]_\lambda = \{u, v\} + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}(u, v) \qquad (\lambda = \nu^2)$$

On a d'abord établi un théorème d'unicité fondamental qui énonce qu'une algèbre associative formelle (1) satisfaisant aux hypothèses précédentes est caractérisée de manière unique par l'algèbre de Lie formelle qu'elle engendre.

En ce qui concerne les problèmes d'invariance de la Mécanique quantique, il est important d'étudier l'algèbre de Lie des dérivations et le groupe Aut $(*_\nu)$ des automorphismes du $*_\nu$-produit. Un tel automorphisme est un automorphisme :

$$A_\nu = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^s A_s$$

de l'espace E (N ; ν) qui respecte le $*_\nu$-produit. Si $A_0 = \mathrm{Id}.$ l'automorphisme est dit à partie principale triviale.

On s'est d'abord intéressé à une variété symplectique munie d'une algèbre de Lie formelle (2) et l'on a établi que l'algèbre de Lie des dérivations nulles sur les constantes de cette algèbre est isomorphe à l'algèbre de Lie E (L ; λ), où L est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs symplectiques. On a pu en déduire que, pour tout élément σ de Symp_c (W, F), il existe un automorphisme de l'algèbre de Lie formelle (2) de la forme :

$$A_\lambda = (\mathrm{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda^s B_s)\, \sigma^*$$

où les B_s sont des opérateurs différentiels sur N nuls sur les constantes.

On a ensuite considéré une variété symplectique munie d'une algèbre associative formelle (1) et l'on a déduit de l'étude antérieure que les dérivations de cette algèbre et les dérivations nulles sur les constantes de l'algèbre de Lie qui s'en déduit coïncident. En particulier si le premier nombre de Betti b_1 (W) de la variété est nul, les dérivations de (1) sont toutes intérieures.

On a établi, à partir de théorèmes nouveaux concernant la cohomologie de Hochschild, que tout automorphisme de l'algèbre associative a nécessairement la forme :

$$A_\nu = (\mathrm{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s B_s)\, \sigma^* \tag{3}$$

où σ est un symplectomorphisme et les B_s des opérateurs différentiels nuls sur les constantes.

Inversement on a étudié successivement le groupe $\mathrm{Aut}_t (*_\nu)$ des automorphismes à partie principale triviale de l'algèbre (1) et les automorphismes pairs en ν. Pour b_1 (W) = 0, $\mathrm{Aut}_t (*_\nu)$ coïncide avec le groupe $\mathrm{Aut}_i (*_\nu)$ des automorphismes intérieurs de l'algèbre associative. On en déduit que $\mathrm{Aut}_t (*_\nu)$ coïncide avec le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie correspondante qui sont de la forme :

$$A_\nu = \mathrm{Id} + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s A_s$$

où les A_s sont des opérateurs différentiels nuls sur les constantes.

A partir de l'étude des automorphismes pairs en ν, on démontre que $\mathrm{Aut}(*_\nu)$ coïncide avec le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie correspondante qui sont de la forme (3). Le groupe $\mathrm{Aut}(*_\nu)/\mathrm{Aut}_t(*_\nu)$ est ainsi isomorphe à un sous-groupe H de Symp (W, F) qui contient Symp_c (W, F).

A. L.

SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A - Physique mathématique

J.-M. SOURIAU, La mécanique quantique est-elle invariante par le groupe symplectique ?

FRANCAVIGLIA, Systèmes décomposables en dynamique et Relativité générale.

C. de WITT, Approche mathématique de l'intégrale de Feynman.

SIGBATULIN, Propagation des ondes gravitationnelles et électromagnétiques dans un champ intense.

B - Géométrie différentielle

S. GOLDBERG, Problèmes liés à une généralisation réelle du théorème de Schwarz.

A. GRAY, Applications des formules liées au volume de la boule riemanniene.

MISSIONS ET CONFÉRENCES

M. André Lichnerowicz a été professeur invité au Massachusetts Institute of Technology (de février à mai 1979) et à l'Université de Barcelone (novembre 1978). Il a été conférencier invité au Colloque International sur les méthodes de théorie des groupes en Mécanique qui s'est tenu à Novosibirsk en août 1978, à l'Integrative Conference on Group Theory and Mathematical Physics (Austin, Texas, septembre 1978), au Colloque International qui s'est tenu à Santiago de Compostella en septembre 1978, au Symposium International de Physique Mathématique de Lowell Mass. (février 1979), à la conférence commémorant le centenaire d'Einstein

(Collège de France, juin 1979). Il a donné des conférences à Harvard University, Brandeis University, North Eastern University, aux Universités de Madrid, Mannheim, Strasbourg, Limoges et Mulhouse. Il a participé aux Journées d'analyse globale sur les variétés qui se sont tenues à Metz (mai 1979).

PUBLICATIONS

A. LICHNEROWICZ, *Quantum Field Theory on a curved Manifold* (*Proc. of the Steklov Inst. of Mathem.*, 1978, n° 1).

— *Automorphismes et dérivations d'algèbres formelles associées par déformations à une variété symplectique* (*Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. 287, A, 1978, p. 1029-1033).

— *Remarques sur deux théorèmes de Banyaga* (Ibidem, t. 287, A, 1978, p. 1121-1124).

— *Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées* (*J. de Mathém. pures et appl.*, t. 57, 1978, p. 453-488).

— *Deformations of algebras associated to a symplectic manifold and quantization* (*Proceedings of the Symposium on group theoretical methods in Mechanics*, Novosibirsk, août 1978, p. 155-168).

— *Relatività e fisica matematica. Centenario di Einstein*, p. 100-150, Barbera Firenze, 1979. English translation Academic Press, 1979.

— *Deformation Theory and quantization, Group Theoretical Methods* (in *Physics Lect. Notes in Physics Springer*, Berlin, 1979, p. 280-290).