Théorie des groupes

M. Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Cette année était celle du centenaire d'Albert Einstein. Cette circonstance a inspiré le choix du thème : « Problèmes de théorie des groupes en relativité Einsteinienne et chronogéométrie ».

Un exposé introductif à caractère partiellement historique des deux théories relativistes — la relativité restreinte dans la formulation due essentiellement à H. Minkowski, et la relativité générale comprise à la façon d'Elie Cartan — ont permis de mettre en évidence le rôle multiple de la théorie des groupes dans ces questions.

Parmi les problèmes évoqués, signalons :

— la détermination des univers satisfaisant à certaines conditions d'homogénéité et d'isotropie (problème de cosmologie) ;

— l'étude des notions de causalité et de causalité locale, et la détermination des automorphismes de certains univers structurés par la seule relation de causalité (variantes du théorème d'Alexandrov-Zeeman) ;

— diverses justifications *a priori* de l'hypothèse de quadraticité du cône de lumière ;

— la justification *a priori* de la forme des équations d'Einstein (d'après E. Cartan) ;

— la recherche de critères d'existence d'éléments non conjugués à leur opposé dans une algèbre de Lie (problème lié à la positivité de l'opérateur d'énergie).

Dans ce résumé, on parlera seulement du premier problème cité, qui a occupé la majeure partie du cours.

Soit M une variété différentiable connexe de dimension finie munie d'un « champ de cônes convexes », c'est-à-dire de la donnée dans l'espace tangent $T_p(M)$ en tout point $p \in M$ d'un cône convexe fermé C_p. Une direction tangente à M en p (c'est-à-dire un sous-espace à une dimension de $T_p(M)$) est dite « de temps », « de lumière » ou « d'espace » selon qu'elle rencontre l'intérieur de C_p, qu'elle rencontre le bord ∂C_p de C_p ailleurs qu'au point 0 ou que son intersection avec C_p est réduite à $\{0\}$. On s'intéresse aux systèmes $(M, (C_p))$ dont le groupe d'automorphismes est transitif sur l'ensemble de toutes les directions de l'un des types en question. Le cas d'une variété M de dimension 4, d'un champ de cônes quadratiques et des directions de temps a une signification physique (ou plutôt cosmologique) intéressante : c'est celui des univers de la relativité générale qui satisfont à une forme faible (« ponctuelle ») du principe de relativité restreinte.

Sous des conditions assez générales (par exemple, lorsque (C_p) est un champ différentiable de cônes quadratiques : cf. S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry,* Springer, 1972, pp. 9 et 22), le groupe de tous les automorphismes du système $(M, (C_p))$ est un « groupe de Lie de transformations » de la variété M. Le problème étudié peut alors se généraliser come suit. L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie X étant notée $L(X)$, on considère les triples (G, H, C) formés d'un groupe de Lie G, d'un sous-groupe de Lie H et d'un cône convexe fermé $C \subset L(G)/L(H)$ invariant par H (qui opère sur le quotient $L(G)/L(H)$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe). Nous disons que le triple (G, H, C) possède la propriété (T) (resp. (L) ; resp. (E)) si le groupe H permute transitivement les droites de $L(G)/L(H)$ qui rencontrent l'intérieur de C (resp. qui appartiennent à $\partial C \cup (-\partial C)$; resp. dont l'intersection avec C est réduite à $\{0\}$). Si H est fermé dans G et rencontre chaque composante connexe de G, ce que nous supposerons dans ce résumé pour éviter des complications techniques, $M = G/H$ est une variété connexe que l'on peut munir du champ de cônes (C_p) obtenus en translatant C par G ; les propriétés (T), (L), (E) traduisent alors les propriétés d'isotropie dont il a été question plus haut, à ceci près que le groupe $\mathrm{Aut}(M, (C_p))$ de tous les automorphismes de $(M, (C_p))$ est remplacé par G. Le fait de considérer *un* groupe G opérant sur la variété M au lieu de $(M, (C_p))$ signifie pratiquement qu'outre la relation de causalité exprimée par le champ (C_p), on suppose la variété M éventuellement dotée de structures additionnelles non spécifiées.

Dans un article ancien (*Colloque sur la théorie de la relativité,* C.B.R.M., Bruxelles, 1960, 107-119), j'avais donné, avec esquisse de démonstration, la classification des systèmes (G, H, C) possédant l'une des propriétés (L) ou (E). Le résultat, redémontré dans le cours plus simplement que dans l'article cité, par une méthode inspirée du « truc unitaire » de Hermann Weyl, est en gros le suivant. En dimension 4, et plus généralement en dimension paire, les variétés M correspondant aux systèmes considérés sont pseudo-riemanniennes à courbure sectionnelle constante ou localement décomposée en produit cartésien d'une variété riemannienne à courbure sectionnelle constante et d'une « droite de temps » (nous ne reprenons pas ici l'énumération des groupes G possibles dans chaque cas). En dimension impaire, on trouve encore plusieurs autres solutions. Citons seulement, à titre d'exemple, la sphère S^{2n+1} dotée d'une métrique pseudo-riemannienne invariante par le groupe $\mathrm{SU}(n+1)$ (le choix d'une telle métrique dépend de deux paramètres réels) et, cas limite du précédent, le groupe de Heisenberg H^{2n+1} de dimension $2n+1$ doté d'une métrique pseudo-riemanienne invariante par translation et par le groupe $\mathrm{SU}(n)$ (opérant sur H^{2n+1} comme groupe d'automorphismes).

Le cas, plus intéressant, de la propriété (T), est aussi beaucoup plus compliqué. Cette complication est notamment mise en évidence par l'existence (selon E.B. Vinberg) d'une grande variété de cônes convexes homogènes, et aussi par l'exemple suivant, généralisant un exemple de I.E. Segal (*Mathematical cosmology and extragalactic astronomy,* Academic Press, 1976, p. 35) : soit X un espace vectoriel réel, complexe ou quaternionien de dimension $2n$ doté d'une forme antihermitienne h non dégénérée d'indice maximum, et soient M la variété des sous-espaces totalement isotropes de dimension n, G le groupe SU (h) et H le stabilisateur d'un point de M dans G ; alors, $L(G)/L(H)$ peut être identifié « naturellement » à l'espace des matrices hermitiennes d'ordre n et si C désigne le cône des matrices hermitiennes positives, le système (G, H, C) a la propriété (T). (Il existe aussi une version « octavienne » de cet exemple dans laquelle G est une forme réelle du groupe E_7.)

Dans le cours, les triples (G, H, C) possédant la propriété (T) ont été déterminés sous les hypothèses suivantes :

C est un cône quadratique (en dimension 4, cette hypothèse est automatiquement satisfaite si l'on suppose C strictement convexe) ;

H laisse invariante toute forme quadratique dans $L(G)/L(H)$ s'annulant sur C (il semble qu'on doive pouvoir se débarrasser assez facilement de cette hypothèse).

Cela revient à dire que la variété $M = G/H$ possède une métrique pseudo-riemannienne invariante par G.

Pour énoncer le résultat de cette classification (voir théorème ci-dessous), nous devons au préalable décrire une solution particulière du problème envisagé. Considérons un espace projectif réel π de dimension $n \geqslant 3$, une hyperquadrique $Q \subset \pi$ d'indice de Witt 2 (c'est-à-dire contenant des droites et non des plans) et une droite D de Q. Soit K celle des deux composantes connexes de $\pi - Q$ dont la métrique « cayléenne » a une signature hyperbolique normale (ou, si $n = 3$, l'une quelconque des deux composantes de $\pi - Q$). Notons P le stabilisateur connexe du couple (Q, D) dans le groupe projectif, U et R le radical unipotent et un sous-groupe de Levi de P et R_1

un sous-groupe connexe de R contenant le facteur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ (ou $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$) de R et non contenu dans le plus grand sous-groupe connexe semi-simple de R. Alors, on vérifie que le groupe R_1U est transitif sur les directions de temps de l'espace pseudo-riemannien K (par contre, il laisse invariant un champ de directions lumineuses : cette observation n'est peut-être pas sans intérêt cosmologique).

THÉORÈME. *Soit* $M = G/H$ *un espace homogène de groupes de Lie doté d'une métrique pseudo-riemanienne à signature hyperbolique normale invariante par* G, *telle que* G *opère fidèlement sur* M *et permute transitivement les directions de temps. Alors, le système* (G, H) *est localement isomorphe à un système* (G', H') *possédant l'une des propriétés suivantes :*

G'/H' *est un espace pseudo-riemannien simplement connexe à courbure sectionnelle constante et* G' *est le groupe de toutes les isométries de cet espace ;*

G'/H' *est un espace de Minkowski (espace affine doté d'une métrique pseudo-riemanienne invariante par translations) et* G' *laisse invariante une famille de rayons lumineux parallèles ;*

il existe π, Q, D, K, R_1 *et* U *comme ci-dessus tels que* $G'/H' = K$ *et* $G' = R_1U$.

Il faut noter que, contrairement à ce qui se passe pour les propriétés (L) et (E), la démonstration de ce théorème fait intervenir de façon essentielle des groupes non réductifs.

A la fin du cours, l'axiomatique proposée par I.E. Segal dans le livre cité plus haut a été discutée à la lumière des résultats établis auparavant et résumés ci-dessus.

J. T.

SÉMINAIRE

Le séminaire a consisté en quatre exposés (par J. Tits) :

Quaternions sur $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, *réseau de Leech et groupe sporadique de Hall-Janko* (2 exposés).

Un immeuble affine de type G_2 *associé au groupe de Lyons* (2 exposés).

Les deux premiers exposés faisaient suite au séminaire de l'année précédente. On y a notamment établi le résultat suivant. Soient G le groupe icosaédral binaire, plongé de la façon usuelle dans l'algèbre $\mathbf{H}$ des quaternions de Hamilton, et K (resp. R) la sous-$\mathbf{Q}$-algèbre (resp. le sous-anneau) de $\mathbf{H}$ engendré par G. On sait que K est isomorphe à l'algèbre de quaternions $\mathbf{Q}(\sqrt{5})(i, j, k)$. Posons $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ et $e = \tau + \zeta$, où ζ est un élément d'ordre 3 de G. Soit $\lambda : \mathbf{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbf{Q}$ l'application $\mathbf{Q}$-linéaire définie par $\lambda(1) = 1$ et $\lambda(\tau) = 0$. Dans le R-module R^3 doté de la forme hermitienne h standard, considérons le sous-module Λ engendré par les vecteurs $(2, 0, 0)$, $(\bar{e}, \bar{e}, 0)$ et $(1, e, 1)$. Alors, Λ *considéré comme* $\mathbf{Z}$*-module doté de la forme quadratique* $x \mapsto \lambda(h(x, x))$ *est le réseau de Leech, et le groupe des automorphismes de* R*-module de* Λ *préservant la forme* h *est une extension centrale du groupe sporadique* J_2 *de Hall-Janko par* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Dans les autres exposés de séminaire, on a montré que le revêtement universel du complexe des drapeaux de la « géométrie de type $\widetilde{\mathrm{G}}_2$ » (avec $\widetilde{\mathrm{G}}_2 = \,|\!\!-\!\!-\!\!|\!\!\overset{6}{-\!\!-}\!\!|$) associée par F. Buekenhout et W. Kantor au groupe sporadique de Lyons est un immeuble de type $\widetilde{\mathrm{G}}_2$ (« immeuble affine de type G_2 ») qui n'est pas l'immeuble affine d'un groupe de type G_2 sur un corps local.

PUBLICATIONS

A. BOREL et J. TITS, *Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires* (*C.R. Acad. Sci. Paris,* A 287, 1978, 55-57).

W. FEIT and J. TITS, *Projective representations of minimum degree of group extensions* (*Canadian J. Math.,* 30, 1978, 1092-1102).

J. TITS, *Groupes de Whitehead et groupes algébriques simples sur un corps* (*d'après V.P. Platonov et al.*) (Séminaire Bourbaki, exposé n° 505, juin 1977 ; *Springer Lecture Notes in Math.,* 677, 1978, 218-236).

— *Non-existence de certains polygones généralisés.* II (*Inventiones Math.,* 51, 1979, 267-269).

— *Reductive groups over local fields* (*Summer Inst. on Group representations and automorphic form,* Corvallis, 1977 ; *Proc. Symp. Pure Math.,* 33, 1979, vol. 1, 29-69).

Missions et conférences

Symposium on finite simple groups, Durham, août 1979.

Exposés : *Mathieu groups,*
Four presentations of Leech's lattice,
Buildings and Buekenhout geometries.

Congrès International des Mathématiciens, Helsinki, août 1978.

Présentation des travaux de G.A. Margulis, médaille Fields 1978.

Deux exposés sur le *Principe de trialité* (Séminaire Chevalley, Paris, 1978).

Tagung über algebraische Gruppen, Oberwolfach, avril 1979.

Codirection de la conférence avec T.A. Springer (Utrecht).

Arbeitstagung, Bonn, juin 1979.

Exposé : *On Leech's lattice and sporadic groups.*

Distinctions

Doctorat *honoris causa* de l'Université de Gand, 1979.

Election à l'Académie des Sciences, 1979.