Physique mathématique

M. André Lichnerowicz, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mardi* a été consacré à l'étude de l'algèbre de Lie L de tous les champs de vecteurs d'une variété différentiable. Ce cours a constitué l'un des volets d'une étude systématique et comparative des quatre algèbres de Lie infinies classiques d'Elie Cartan auxquelles ont déjà été consacrés deux cours antérieurs. Le but principal visé était la détermination des déformations formelles différentiables de l'algèbre de Lie L. L'analyse de ces déformations procède de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie L, c'est-à-dire de la cohomologie à valeurs dans l'algèbre de Lie elle-même déterminée par la représentation adjointe. On note $H^p(L; L)$ le p^e-espace de cohomologie correspondant.

En dimension 1, les 1-cocycles sont les dérivations de l'algèbre de Lie. On sait, d'après Takens, que toutes ces dérivations sont intérieures, c'est-à-dire que $H^1(L; L) = \{0\}$. En élargissant ce cadre, on a procédé par une méthode directe à l'étude des 1-cochaînes de L à cobords m-différentiables ($m \geqq 1$) et on a montré que ces 1-cochaînes sont exactement définies par les opérateurs différentiels d'ordre m. Ce résultat, qui est une généralisation du théorème de Takens et qui l'entraîne effectivement comme corollaire, s'est révélé nécessaire à l'étude des équivalences entre déformations.

En dimension supérieure à 1, on s'est réduit à la cohomologie différentiable. Un théorème général permet d'en déduire l'analyse de la cohomologie locale de L. On a d'abord montré directement que la cohomologie 1-différentiable de l'algèbre de Lie L est toujours triviale. On a pu en déduire, par un procédé original de récurrence basé sur des calculs un peu lourds, *la trivialité de la cohomologie* m-*différenciable de* L *pour tout entier* $m \geqq 1$.

Ce résultat et ceux qui s'en déduisent ont été obtenus, récemment et indépendamment, par Shiga à partir d'une méthode fort sophistiquée s'appuyant sur les approches de Gelfand-Fuks et de Losik. Le champ d'application de notre méthode apparaît différent de celui de Shiga. En particulier notre méthode et les calculs élaborés correspondants permettront, dans un prochain cours, l'analyse des déformations *des algèbres de Lie associées à un feuilletage.*

On est ainsi parvenu à établir l'important théorème suivant : *toutes les déformations formelles différentiables de l'algèbre de Lie* L *sont différentiablement triviales.*

Une dernière partie du cours a été consacrée à l'établissement *des propriétés des idéaux de l'algèbre de Lie* L (propriétés qui sont communes aux quatre algèbres de Lie infinies classiques) : en particulier tous ces idéaux sont semi-simples et de dimension infinie, aucun idéal non trivial n'admet un idéal supplémentaire. Comme dans les autres cas, l'étude générale de ces idéaux repose largement sur ce que nous avons nommé un lemme principal, lemme qui prend ici la forme la plus complexe des quatre cas envisagés.

*
**

Le cours du *Mercredi* a porté sur *la géométrie des transformations canoniques.* On sait l'importance de ces transformations en Mécanique Analytique et Physique Théorique, mais on doit noter que la quasi-totalité des traitements classiques concernant les transformations canoniques se limite aux systèmes à liaisons indépendantes du temps et se révèlent locaux et non intrinsèques, alors que le rôle du groupe (de dimension infinie) des transformations canoniques n'est pleinement intelligible que dans un contexte global.

Le but de ce cours a donc été l'élaboration d'une théorie globale des transformations canoniques. Etant donné un système dynamique classique à liaisons pouvant dépendre du temps, la géométrie du système est naturellement décrite par une variété de contact W, munie d'une projection temporelle t. On en déduit que W admet une structure (W, Λ, t) de *variété canonique* admettant une 2-forme F. Pour une telle structure t et le 2-tenseur Λ vérifient au sens des crochets de Schouten :

$$[\Lambda, t] = 0 \qquad [\Lambda, \Lambda] = 0.$$

Cette notion de variété canonique a été introduite et étudiée dans un cours antérieur. Une transformation canonique apparaît ici comme un automorphisme de la structure canonique définie par Λ et t. La variété W admet un champ de vecteurs E caractérisé par

$$i(E)\,dt = 1 \qquad i(E)\,F = 0.$$

L'action d'une transformation canonique sur F et E joue, pour la Mécanique, un rôle fondamental. Si H est l'hamiltonien du système, les mouvements sont définis en fonction du temps par les courbes intégrales du champ de vecteurs :

$$X = E + [\Lambda, H].$$

Après avoir introduit ces notions, on a été conduit à étudier la $\bar{d}$-cohomologie associée au feuilletage de la variété canonique et à analyser les algèbres de Lie et les groupes qui apparaissent naturellement : groupe des transformations conformes canoniques, groupes des transformations canoniques et canoniques exactes, au sens de la $\bar{d}$-cohomologie. On a établi (ce qui semble à peu près inconnu) que le plus grand groupe d'invariance des équations d'Hamilton est non pas le groupe des transformations canoniques exactes, mais *le groupe des transformations homothétiques canoniques exactes.* Ceci explique en particulier un résultat de V. Arnold.

La dernière partie du cours a été consacrée à l'analyse de sous-groupes connexes par arcs différentiables par morceaux des groupes précédents. On a montré en particulier que le groupe connexe des transformations canoniques exactes est invariant dans le groupe des transformations homothétiques canoniques. On a mis enfin en évidence, en utilisant certaines des techniques de A. Banyaga, l'importance d'un sous-groupe invariant — noté $\mathrm{Can}_c^*(W)$ — qui contient en particulier le groupe des commutateurs du groupe connexe des transformations canoniques de la variété.

A. L.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

A - *Physique mathématique*

A.H. Taub, Generalization of Kerr-Schild metrics.

L. Radicati, Détection électromagnétique des ondes gravitationnelles.

M. Petry, Electron scattering on magnetic monopole.

M. Demianski, Sur la théorie quantique des champs.

D. Christodoulou, The boost problem for systems of quasilinear second order hyperbolic equations.

H. Muller zum Hagen, On the characteristic initial value problem for Einstein's equations.

M. Kijowski, La structure symplectique de la Relativité générale.

J. Marsden, Bifurcation of mappings with applications to general Relativity.

B - *Géométrie différentielle*

M. Naveira, Points critiques de la courbure sectionnelle dans les variétés presque hermitiennes.

Mme Y. Schwarzbach-Kossmann, Géométrie des transformations de Backlund.

M. Rosca, Sous-variétés symplectiques.

Missions et conférences

M. André Lichnerowicz a été professeur invité à l'Université du Koweit (février 1980). Il a été invité par l'Academia Nazionale dei Lincei à prononcer le discours de célébration d'Albert Einstein en présence du président de la République italienne (décembre 1979). Il a été conférencier invité au second Colloque Marcel Grossmann organisé par le Centre International de Physique théorique de l'Unesco à Trieste (juillet 1979), au Colloque international C.N.R.S. de Physique mathématique d'Aix (août 1979), au symposium international sur les méthodes géométriques en Physique mathématique organisé par l'Université de Salamanca (septembre 1979), aux Journées internationales de géométrie différentielle de Liège (avril 1980) et aux Journées relativistes de Caen (mai 1980), au Colloque international sur les Aspects mathématiques de la Relativité générale de Rome (juin 1980). Il a donné des cycles de conférences aux Université de Rome, Dijon, Tunis et Sfax et un cours à l'Ecole d'été de Physique Mathématique organisée par l'Unesco à Istanbul (août 1979).

Publications

A. Lichnerowicz, *Sur la géométrie des transformations canoniques* (*Comptes rendus Ac. Sc. Paris,* t. 289, A, 1979, p. 279-283).

— *Existence et équivalence de $*_\nu$ - produits sur une variété symplectique* (Ibidem, t. 289, A, p. 349-353).

— *Déformations de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact* (Ibidem, t. 290, A, p. 241-245).

— *Deformations and Quantization* (dans *Geometric Methods in Mathematical Physics,* Ed. Kaiser et Marsden Springer, 1979, p. 105-121).

— *Existence and Equivalence of twisted products on a symplectic manifold* (*Lett. in Math. Physics,* t. 3, 1979, p. 495-502).

— *Einstein et notre science* (*Acc. Naz. dei Lincei,* Roma, 1979).

— *Automorphisms of formal algebras associated by deformation with a symplectic manifold* (*Essays in General Relativity ;* un volume en l'honneur de A.H. Taub, Accademic Press New York, 1980, p. 204-217).

— *Relativity and Mathematical Physics* (in *Relativity, Quanta and Cosmology,* Ed. F. de Finis Johnson Corp. New York, 1979, p 403-472).