Théorie des groupes

M. Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

L'étude des groupes algébriques semi-simples p-adiques a montré l'importance d'une classe de sous-groupes compacts ouverts, les sous-groupes « parahoriques », contenant notamment les sous-groupes compacts maximaux, au moins dans le cas simplement connexe. Un exemple est fourni par le sous-groupe $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z}_p)$ des points entiers de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Q}_p)$ pour la structure de schéma en groupes usuelle sur $\mathbf{SL}_n$. On peut se demander si un sous-groupe parahorique est toujours le groupe des points entiers pour une structure de schéma qui lui est naturellement associée sur le groupe semi-simple envisagé. Le but du cours, intitulé « *Schémas en groupes sur un anneau de valuation ; immeubles affines* », a été de montrer qu'il en est bien ainsi, d'ailleurs pour une classe de sous-groupes beaucoup plus étendue que celle des sous-groupes parahoriques, et d'indiquer comment ce fait peut être utilisé pour prouver l'existence de l'immeuble affine d'un groupe réductif p-adique (voir notamment le résumé du cours de 1974-1975). Les résultats exposés étaient, pour la plupart, le fruit d'une collaboration avec F. Bruhat.

Le cadre général du problème étudié est le suivant. On considère un groupe réductif G défini sur un corps K et un tore déployé S de G. Soient X le groupe des caractères de S et Φ l'ensemble des « rayons » de l'espace vectoriel $X \otimes \mathbf{R}$ de la forme $\mathbf{R}_+^*.\alpha$, où α est un poids non nul de S dans G (c'est-à-dire dans son algèbre de Lie). Pour $a \in \Phi$, il existe un plus grand K-sous-groupe de G normalisé par S et tel que tous les poids de S dans ce sous-groupe appartiennent à a : on le note U_a et l'on désigne par Z le centralisateur de S dans G. Donnons-nous à présent un sous-anneau A de K et des schémas en groupes lisses $\mathcal{U}_a$ (pour $a \in \Phi$) et $\mathcal{Z}$ « prolongeant » les groupes U_a et Z, c'est-à-dire « devenant U_a et Z » par le changement de base $A \to K$. On en déduit une structure de schéma Ω sur la « grande cellule »

$$\prod_{\substack{a \in \Phi \\ a < 0}} \mathcal{U}_a \times \mathcal{Z} \times \prod_{\substack{a \in \Phi \\ a > 0}} \mathcal{U}_a$$

(relative à un ordre donné sur Φ) et le problème consiste, sous certaines conditions imposées à ces diverses données, à construire un schéma en groupes lisse $\mathcal{G}$ prolongeant G et ayant Ω comme sous-schéma ouvert.

Deux méthodes permettent d'atteindre ce but. La première consiste à montrer (toujours moyennant certaines hypothèses) que Ω est un « germe de schéma en groupes » puis à « intégrer » ce germe en utilisant un théorème bien connu de A. Weil généralisé par M. Artin. La deuxième, adoptée dans le cours, est basée sur la considération de représentations linéaires : cette méthode donne des résultats à certains égards moins généraux que l'autre — notamment en ce qui concerne les anneaux auxquels elle s'applique —, mais elle a l'avantage de fournir des constructions explicites et d'éviter le recours à la notion de germe de schéma en groupes, d'un maniment délicat et peu agréable, et à des résultats pour lesquels la littérature est déficiente. Elle se fonde sur la proposition, assez facile, énoncée ci-après. Les notations précédentes sont conservées, on suppose G contenu comme sous-groupe fermé dans le groupe algébrique $GL(V)$ des automorphismes d'un espace vectoriel V sur K, et l'on se donne un A-module projectif de type fini $M \subset V$ tel que l'homomorphisme canonique $M \underset{A}{\otimes} K \to V$ soit un isomorphisme. On note $\mathcal{S}$ ($=$ Spec $A[X]$) le schéma en tores déployés prolongeant S et l'on suppose que les injections $U_a \to GL(V)$ (pour $a \in \Phi$), $Z \to GL(V)$, $S \to GL(V)$ se prolongent en des immersions fermées $\mathcal{U}_a \to \mathcal{G}\mathcal{L}(M)$, $\mathcal{Z} \to \mathcal{G}\mathcal{L}(M)$, $\mathcal{S} \to \mathcal{G}\mathcal{L}(M)$, où $\mathcal{G}\mathcal{L}(M)$ représente le schéma en groupes des automorphismes de M. Une partie de Φ est dite *strictement convexe* si elle est formée de tous les éléments de Φ contenus dans un cône strictement convexe de $X \otimes \mathbf{R}$.

Proposition. (i) *Si Ψ est une partie strictement convexe de Φ, il existe un sous-schéma en groupes fermé $\mathcal{U}_\Psi$ de $\mathcal{G}\mathcal{L}(M)$ contenant les $\mathcal{U}_a$, pour $a \in \Phi$, comme sous-schémas fermés, et tel que l'application produit*

$$\prod_{a \in \Psi} \mathcal{U}_a \to \mathcal{U}_\Psi$$

soit un isomorphisme de schémas quel que soit l'ordre des facteurs du produit.

(ii) *Si l'adhérence schématique $\mathcal{G}$ de G dans $\mathcal{G}\mathcal{L}(M)$ est plate — par exemple si A est un anneau de Dedekind ou, plus généralement, un anneau prüférien —, $\mathcal{G}$ est un sous-schéma en groupes lisse de $\mathcal{G}\mathcal{L}(M)$. Si de plus Φ_+ et Φ_- désignent deux parties strictement convexes complémentaires de Φ, alors l'application produit induit un isomorphisme de schémas du produit $\mathcal{U}_{\Phi_+} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U}_{\Phi_-}$ sur un sous-schéma ouvert de $\mathcal{G}$, « ouvert d'inversibilité » d'un élément de l'algèbre affine $A[\mathcal{G}]$.*

Dans la pratique, les « A-structures » $\mathcal{U}_a$ et $\mathcal{Z}$ sont données et il s'agit de trouver une représentation fidèle $\varrho : G \to GL(V)$ (par laquelle on identifie G à un sous-groupe de $GL(V)$) et un sous-A-module M de V satisfaisant aux hypothèses de la proposition précédente. Pour cela, il est facile de voir que les $\mathscr{U}_a$ et $\mathscr{Z}$ doivent remplir une condition (*) que nous allons énoncer. Si $a, b \in \Phi$, on sait que le commutateur $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ définit un morphisme

$$U_a \times U_b \to \prod_{\substack{c \in \Phi \\ c \subset a + b}} U_c \tag{1}$$

(dans la relation $c \subset a + b$, les éléments a, b, c doivent être vus comme des parties de $X \otimes \mathbf{R}$). Le groupe Z normalise chaque U_a et la conjugaison $(z, x) \mapsto zxz^{-1}$ définit un morphisme

$$Z \times U_a \to U_a. \tag{2}$$

Enfin, si $a \in \Phi$, un ouvert dense de $U_a \times U_{-a}$ contenant l'élément neutre est appliqué par l'application produit dans $U_{-a}ZU_a$, d'où un « morphisme rationnel »

$$U_a \times U_{-a} \to U_{-a} \times Z \times U_a. \tag{3}$$

La condition annoncée est alors la suivante :

(*) *les morphismes* (1), (2), (3) *sont « définis sur A », c'est-à-dire, proviennent par changement de base de A-morphismes*

$$\mathscr{U}_a \times \mathscr{U}_b \to \prod_{\substack{c \in \Phi \\ c \subset a + b}} \mathscr{U}_c$$

etc.

Pour (3), cela veut dire qu'il existe un ouvert $\mathscr{Y}$ de $\mathscr{U}_a \times \mathscr{U}_{-a}$ contenant le produit des sections unités et un morphisme $\mathscr{Y} \to \mathscr{U}_{-a} \times \mathscr{Z} \times \mathscr{U}_a$ devenant (3) par changement de base.

La majeure partie du cours a été consacrée à la preuve du

THÉORÈME. *Supposons l'anneau A prüférien et la condition* (*) *satisfaite. Supposons en outre que* $\operatorname{car} K = 0$ *ou que Z soit un tore (ce qui implique que G soit quasi-déployé). Alors, il existe une représentation fidèle $\varrho : G \to GL(V)$ et un sous-A-module M de V satisfaisant aux hypothèses de la proposition ci-dessus.*

(Dans le cours, la condition « $\operatorname{car} K = 0$ ou Z est un tore », posée ici pour la simplicité de ce résumé, était remplacée par une hypothèse plus générale, mais aussi plus technique, concernant le schéma en groupes $\mathscr{Z}$.)

On peut montrer que (*) est précisément la condition dont on a besoin pour faire du produit

$$\prod_{a<0} \mathscr{U}_a \times \mathscr{Z} \times \prod_{a>0} \mathscr{U}_a$$

un germe de schéma en groupes, et appliquer la première méthode de construction du schéma $\mathscr{G}$ évoquée plus haut. Un ingrédient essentiel de la démonstration du théorème est une version différentielle, plus élémentaire, de cette constatation : désignant par Dist $\mathscr{X}$ l'algèbre des distributions à l'origine d'un schéma en groupes $\mathscr{X}$ et identifiant Dist $\mathscr{U}_a$ et Dist $\mathscr{Z}$ avec leurs images canoniques dans Dist $\mathscr{G}$, on montre facilement que, si la condition (*) est remplie, le produit tensoriel

$$(\bigotimes_{a \in \Phi} \text{Dist } \mathscr{U}_a) \otimes \text{Dist } \mathscr{Z}$$

s'identifie à une sous-A-algèbre Δ de Dist G ; c'est l'algèbre des distributions à l'origine du schéma en groupes $\mathscr{G}$ que l'on veut construire.

Indiquons brièvement de quelle façon Δ est utilisé pour démontrer le théorème. On suppose A prüférien. Soient $2d$ la somme des dimensions des U_a pour $a \in \Phi$, Y' la d-ième puissance extérieure de l'algèbre de Lie du « revêtement simplement connexe » du groupe dérivé de G, Y_1 la droite de Y' correspondant à l'algèbre de Lie de $\prod_{a>0} U_a$ et Y le plus petit sous-espace de Y' contenant Y_1 et stable par G pour la représentation linéaire $G \to GL(Y')$ évidente. Nous notons ϱ_+ la représentation linéaire $G \to GL(Y)$ déduite de celle-là. Soient y un point de Y_1 et M_+ le module Δy. On montre alors que l'homomorphisme canonique $M_+ \otimes \mathbf{R} \to Y$ est un isomorphisme et que les restrictions de ϱ_+ aux U_a et à Z se prolongent en des homomorphismes de schémas en groupes $\mathscr{U}_a \to \mathscr{G}\mathscr{L}(M_+)$ et $\mathscr{Z} \to \mathscr{G}\mathscr{L}(M_+)$, dont le premier est une immersion fermée lorsque a est positif ; autrement dit, les $\mathscr{U}_a$ et $\mathscr{Z}$ opèrent morphiquement sur M_+ », et l'opération de $\mathscr{U}_a$ est « fidèle » si $a > 0$. Le module M du théorème s'obtient comme somme directe de M_+ et de deux autres modules M_0 et M_- sur lesquels $\mathscr{Z}$ et les $\mathscr{U}_a$ opèrent aussi de telle façon que l'action de $\mathscr{U}_a$ $(a < 0)$ sur M_- et celle de $\mathscr{Z}$ sur M_0 soient fidèles : M_- se définit exactement comme M_+ en remplaçant simplement Y_1 par la droite correspondant à l'algèbre de Lie de $\prod_{a<0} U_a$, et la construction de M_0, bien que différente, est basée sur le même principe.

Le théorème énoncé plus haut s'applique à tout groupe réductif *quasi-déployé* G sur un corps local K, A étant ici l'anneau des entiers de K, et permet notamment d'associer canoniquement à tout sous-groupe parahorique P de $G(K)$ un schéma en groupes lisse $\mathscr{G}_P$ sur A, de fibre générique G, dont P est le groupe des points entiers.

S'appuyant sur ce résultat, on peut simplifier comme suit la démonstration d'existence (donnée dans le cours de 1974-1975) de l'immeuble d'un groupe réductif G *quelconque* sur un corps local K à corps résiduel parfait. Cette démonstration se fait par descente galoisienne à partir de l'extension non ramifiée maximale L de K, sur laquelle on sait que G est quasi-déployé. D'après [Bruhat-Tits, Publ. Math. I.H.E.S., 41 (1972), § 9], un lemme crucial pour cette descente peut s'énoncer ainsi :

Il existe un K-tore de G qui est déployé maximal sur L.

Pour établir ce lemme, on considère un point fixe p du groupe de Galois Gal (L/K) dans l'immeuble de G sur L (la preuve de l'existence de l'immeuble d'un groupe quasi-déployé est chose facile). Le stabilisateur P de p dans $G(K)$ est un sous-groupe parahorique — au moins si G est semi-simple simplement connexe, ce que l'on peut supposer — et le schéma en groupes $\mathscr{G}_P$ sur l'anneau des entiers de L donne par descente un schéma en groupes lisse $\mathscr{G}_1$ sur l'anneau des entiers de K. Soient k et l les corps résiduels de K et L, et considérons un tore maximal $\overline{S}$ du groupe $\mathscr{G}_{1,k}$ obtenu par réduction à partir de $\mathscr{G}_1$. Le « lemme de Hensel » permet de relever $\overline{S}$ en un sous-schéma en tores $\mathscr{S}$ de $\mathscr{G}_1$. Le corps l étant algébriquement clos (car on a supposé k parfait), il déploie $\overline{S}$ et l'on en déduit facilement que le tore $\mathscr{S}_L$ est déployé maximal dans G_L, donc que le K-tore $\mathscr{S}_K$ possède la propriété voulue.

J. T.

Publications

C.W. Curtis, G.I. Lehrer and J. Tits, *Spherical building and the character of the Steinberg representation* (*Invent. Math.* 58, 1980, 201-210).

J. Tits, *Quaternions over* $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$, *Leech's lattice and the sporadic group of Hall-Janko* (*J. of Algebra* 62, 1980, 56-75).

— *The work of Gregori Aleksandrovitch Margulis* (*Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* Helsinki, 1978, vol. 1, 57-63, 1980).

Missions et conférences

Summer research institute on finite group theory, Amer. Math. Soc., Santa Cruz (Calif.), juin-juillet 1979.

Exposés : *Some fundamental results in the theory of arithmetic groups.*

Classification problems for simple p-adic groups and other locally compact groups.

Buildings : old and new.

Réunion annuelle de la Société Mathématique Américaine, Duluth (Minn.), août 1979.

Invited address : *Affine buildings, arithmetic groups and finite geometries.*

Remise de la médaille Fields à G.A. Margulis et exposé sur ses travaux, Bonn, septembre 1979.

Colloque « Groupes et symétries », en l'honneur de L. Bouckaert, Louvain-la-Neuve, décembre 1979.

Conférence : *Quelques aspects de la notion de causalité en relativité générale.*

Réunion bisannuelle de la Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina sur le thème « Raum und Zeit », Dresde, avril 1980.

Conférence : *Geometrie von Raum, Zeit und Kausalität - ein axiomatischer Zugang.*

Journées relativistes, Caen, mai 1980.

Exposé : *Univers isotropes pour la causalité.*

Autres exposés :

— *Free geometries and diagrams* (Gand, octobre 1979).

— *Finite geometries, buildings and S-arithmetic groups* (Eindhoven, octobre 1979).

— *Discrete subgroups of Lie groups, a survey* (ibid.).

— *Construction of Chevalley and related group schemes* (Utrecht, octobre 1979).

— *Introduction aux schémas en groupes* (trois exposés au Séminaire Chevalley, Paris, janvier 1980).

— *Normalisateurs de sous-groupes unipotents* (ibid., avril 1980).

— *Gruppi ad accrescimento polinomiale (secondo M. Gromov)* (Milan, mai 1980).

— *Geometria di incidenza, diagrammi ed edifici* (ibid.).