Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mardi* a été consacré à l'étude des *algèbres de Lie attachées à un feuilletage*. Etant donné, sur une variété différentielle W un feuilletage F, ce feuilletage définit sur W deux algèbres de Lie de champs de vecteurs canoniques : l'algèbre de Lie L des champs de vecteurs tangents au feuilletage et l'algèbre de Lie L_F des champs de vecteurs laissant globalement invariant le feuilletage ; L_F n'est autre que le normalisateur de L dans l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de W. Le but principal visé était l'étude des dérivations et des déformations infinitésimales des algèbres L et L_F. Une telle étude fournit une généralisation de celle des déformations infinitésimales du feuilletage lui-même. Dans un cours antérieur, nous avions étudié du même point de vue l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs d'une variété différenciable. Les méthodes dégagées dans cette étude ont pu être partiellement adaptées à celle des algèbres L et L_F. On sait que dérivations et déformations d'une algèbre de Lie procèdent d'une même cohomologie, dite cohomologie de Chevalley-Eilenberg ; c'est la cohomologie à valeurs dans l'algèbre de Lie elle-même déterminée par sa représentation adjointe. En dimension 1, les 1-cocycles sont les dérivations de l'algèbre de Lie.

On a d'abord procédé à l'étude de l'algèbre L. A cet effet, on a établi que les 1-cochaînes de L à cobord d-différentiel ($d \geqslant 1$) sont elles-mêmes nécessairement définies par des opérateurs différentiels d'ordre d. Ce résultat, utile pour l'analyse des déformations, entraîne de manière aisée la détermination des dérivations de L qui sont données par les crochets par les éléments de L_F. Il en résulte que le premier espace $H^1(L;L)$ de la cohomologie de Chevalley de L est isomorphe à L_F/L. On en déduit aussi que si deux déformations différentielles de L sont équivalentes, elles sont *différentiablement* équivalentes. Nous avons ensuite déterminé le second espace de cohomologie différentielle $H^2(L;L)$ en termes de la cohomologie définie par les formes tangentielles à valeurs dans *le fibré normal* au feuilletage. L'étude de L s'est achevée par une analyse des *idéaux* de L par la méthode que nous avons introduite pour les algèbres de Lie infinies classiques. On a montré, en particulier, que l'algèbre L coïncide avec son idéal dérivé.

L'étude similaire de L_F se révèle naturellement beaucoup plus difficile. Cependant un théorème analogue à celui établi concernant L, pour les 1-cochaînes à cobord d-différentiel, a pu être établi. A partir de ce théorème et en utilisant le fait que $L = [L,L]$, on peut démontrer que toutes les dérivations de L_F sont *intérieures*. Cela posé, une analyse fine de l'espace $H^2(L_F;L_F)$ au moyen des méthodes développées antérieurement montre qu'il est isomorphe à un sous-espace de $H^2(L;L)$. Une longue étude a permis de caractériser ce sous-espace. L'espace des déformations infinitésimales différentielles de L_F, modulo les déformations triviales, est naturellement isomorphe à cet espace. Selon les propriétés du feuilletage, cet espace peut être soit nul, soit de dimension finie, soit de dimension infinie.

*
**

Le cours du *mercredi* se proposait d'offrir une synthèse de la théorie des $*_\nu$-produits dans son état présent, théorie qui a été fondée par M. Flato, J. Vey et nous-mêmes. On sait que les $*_\nu$-produits constituent une classe d'une importance particulière, à la fois mathématique et physique, parmi les déformations associatives de l'algèbre des fonctions à valeurs complexes, définies sur une variété symplectique (W, F). Par antisymétrisation, un tel $*_\nu$-produit engendre une déformation de l'algèbre de Lie de Poisson de la variété. Les points de la théorie des $*_\nu$-produits qui ont été développés complètement, dans ce cours, pour la première fois sont les suivants :

1) Si deux $*_\nu$-produits sont équivalents, ils sont *pair-équivalents* par rapport au paramètre de déformation ν. Ce résultat assure une situation satisfaisante en ce qui concerne l'équivalence des déformations d'algèbre de Lie engendrées par les $*_\nu$-produits.

2) On sait que, sous l'hypothèse que la cohomologie de De Rham de W est triviale en dimension 3, J. Vey a établi (1975) l'existence de déformations d'un type particulier de l'algèbre de Lie de Poisson de la variété (W, F). Neroslavsky et Vlassov, suivant une de nos suggestions, ont établi en 1980 l'existence sous la même hypothèse de $*_\nu$-produits sur une variété symplectique. Une démonstration complète simple de leur théorème a été exposée. Ce résultat repose sur un remarquable théorème de Vey concernant la cohomologie de Hochschild de l'algèbre des fonctions.

Il résulte de nos travaux, menés dans une voie différente, que l'hypothèse faite sur la cohomologie de De Rham est inutile et que sur toute variété symplectique paracompacte il existe des $*_\nu$-produits. Ce théorème général d'existence donnera lieu à un exposé dans un cours ultérieur.

3) Les déformations d'algèbre de Lie mises en évidence par J. Vey ont été caractérisées en termes du premier cocycle de Chevalley qu'elles font apparaître. On en a déduit une caractérisation des déformations de l'algèbre de Lie de Poisson qui peuvent être engendrées par un $*_\nu$-produit, éventuellement faible (c'est-à-dire dont les 2-cochaînes ne s'annulent pas nécessairement sur les constantes, lorsqu'elles sont de rang pair). Ces déformations sont celles qui sont équivalentes aux déformations d'algèbre de Lie de Vey.

4) L'analyse des rapports de la théorie des $*_\nu$-produits avec les processus de quantification a été approfondie et la détermination de certains spectres simplifiée.

A. L.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

M. Vilela-Mendes, Large time behaviour of non abelian gauge theories.

Ph. Droz-Vincent, Problèmes de formulation quantique en dynamique relativiste.

D. Christodoulou, Global properties of solutions of conformaly invariant fiels equations.

H. Sazdjian, Dynamique classique relativiste et séparable de particules interagissant à distance.

J. Ehlers, On the Newtonian limit of General Relativity.

R. Kerner, La théorie d'Einstein-Cartan et la théorie des champs unifiés.

M. Pham-Mau-Quan, Géométrie riemannienne et mécanique.

R. Ruffini, Neutrinos dans un univers en expansion.

J. Szenthe, Action de groupes de Lie sur une variété riemannienne.

B. Bertotti, Dynamical theories fulfilling Mach's Principle.

Distinction

M. André Lichnerowicz a été nommé membre de l'Académie Pontificale des Sciences.

Missions et conférences

M. André Lichnerowicz a été professeur invité à l'University of California at Los Angeles (novembre 1980), à l'University of Georgia (décembre 1980) et à l'Université de Florence (avril 1981).

Il a été conférencier invité au Symposium de Physique Mathématique organisé par le Comité Nobel de Physique à Stockholm (octobre 1980), aux Journées Fermat organisées par l'Université de Toulouse (mars 1981), aux Rencontres entre mathématiciens et physiciens de Strasbourg (mai 1981), au Colloque sur les applications harmoniques organisé à Rome par l'Istituto di Alta Matematica (mai 1981).

Il a donné des conférences à l'University of California at Berkeley, à l'University of Southern California, au Georgian Institute of Technology, aux Universités de Genève, Bruxelles, Rome, Grenoble et Toulouse.

Publications

A. Lichnerowicz, *La géométrie des transformations canoniques,* volume en l'honneur de J. Géhéniau (*Bull. Société Mathématique de Belgique,* t. 31, 1979, p. 105-135).

— *Sur la géométrie des variétés de contact et des variétés symplectiques exactes* (*Comptes rendus Ac. Sc. Paris,* t. 290, A, 1980, p. 963-968).

— *Objets géométriques associés à une structure de contact* (Ibidem, t. 291, A, 1980, p. 129-134).

A. Lichnerowicz et M. Flato, *Cohomologie des représentations définies par la dérivation de Lie et à valeurs dans les formes, de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différenciable. Premiers espaces de cohomologie. Applications* (Ibidem, t. 291, A, 1980, p. 331-335).

A. Lichnerowicz, *Differential geometry and deformations* (Journées Fermat, Toulouse, mars 1981, à paraître).