Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Introduction

Le cours a porté cette année sur les *Algèbres de Kac-Moody et groupes associés,* sujet dont l'étude sera poursuivie l'an prochain.

La classification des algèbres de Lie semi-simples complexes a été accomplie au tournant du siècle par W. Killing et E. Cartan. Leurs résultats, décantés par l'analyse de plusieurs continuateurs, conduit à associer à toute telle algèbre L une matrice à coefficients entiers (A_{ij}), où i,j parcourent un ensemble fini J, possédant les propriétés suivantes :

$A_{ij} = 0$ si et seulement si $A_{ji} = 0$,

$A_{ii} = 2$ pour tout $i \in J$,

$A_{ij} \leqslant 0$ lorsque $i \neq j$.

Une telle matrice est appelée *matrice de Cartan généralisée.* L'algèbre L est déterminée à isomorphisme près par la matrice (A_{ij}) qui lui est associée ; on a, par exemple, la présentation simple suivante, due à C. Chevalley, Harish-Chandra et J.-P. Serre : comme $\mathbf{C}$-algèbre de Lie, L est engendrée par des éléments e_i, f_i, h_i $(i \in J)$ soumis aux relations

(1) $[h_i, h_j] = 0,$

(2) $[h_i, e_j] = A_{ij}e_j,$

(3) $[h_i, f_j] = - A_{ij}f_j,$

(4) $[e_i, f_i] = h_i,$

(5) $[e_i, f_j] = 0 \qquad (i \neq j),$

(6) $(\mathrm{ad}\, e_i)^{-A_{ij}+1}(e_j) = 0 \qquad (i \neq j),$

et

(7) $(\mathrm{ad}\, f_i)^{-A_{ij}+1}(f_j) = 0 \qquad (i \neq j).$

Ces relations ne définissent une algèbre de dimension finie que si (A_{ij}) est produit d'une matrice symétrique définie > 0 par une matrice diagonale, mais elles associent à *toute* matrice de Cartan généralisée une algèbre de Lie. Les algèbres ainsi obtenues, étudiées en premier lieu par V. Kac (*Izv. Mat. Nauk* 32, 1968, 1323-1367) et R.V. Moody (*J. Algebra* 10, 1968, 211-230), et certaines variantes, portent aujourd'hui le nom d'algèbres de Kac-Moody.

De même que les algèbres de Lie complexes semi-simples « donnent naissance » aux groupes analytiques complexes semi-simples puis, par passage à un corps quelconque, aux groupes de Chevalley, de même on peut, à toute **C**-algèbre de Kac-Moody, associer un groupe sur **C**, puis sur un corps quelconque. Cela a été fait par R.V. Moody et K.L. Teo (*J. Algebra* 21, 1972, 178-190), R. Marcuson (*J. Algebra* 34, 1975, 84-96) et, pour certaines matrices A particulières, par H. Garland (*Publ. Math. I.H.E.S.* 52, 1980, 5-136). On rejoint d'ailleurs ici la théorie d'Iwahori-Matsumoto et de Bruhat-Tits exposée notamment dans deux cours antérieurs (1974-1975 et 1979-1980) : en particulier, les groupes de points rationnels des groupes algébriques simples définis sur le corps des séries formelles $\mathbf{C}((t))$ sont étroitement liés aux groupes associés aux algèbres de Kac-Moody correspondant aux matrices de Cartan dites (abusivement) « euclidiennes ».

Ces derniers temps, les algèbres de Kac-Moody et — jusqu'ici dans une moindre mesure — les groupes qui leur sont associés ont trouvé des applications dans de nombreux domaines des mathématiques : analyse combinatoire et identités — classiques et nouvelles — sur la fonction η et d'autres séries de puissances (travaux de Macdonald, Kac, Lepowski, ...), carquois et leurs représentations (Kac), formes modulaires (Kac, Peterson), « monstrous moonshine » (analogies — jusqu'ici formelles — observées par Kac, Lepowski), singularités (Looijenga, Moody, Slodowy), systèmes hamiltoniens (Adler, van Moerbeke), théorie orbitale (Frenkel), modèles de résonance et autres applications physiques (Frenkel, Kac, ...). Ces diverses applications ont été brièvement esquissées dans l'introduction du cours ; certaines d'entre elles ont été exposées de façon plus détaillée dans une série de leçons faites par V. Kac en mai 1981. Des exposés de séminaire par P. Slodowy ont été consacrés aux applications à la théorie des singularités.

La suite du cours a eu pour objectif principal la construction des groupes associés aux algèbres de Kac-Moody. Les constructions de Moody et Teo, de Marcuson et de Garland sont différentes entre elles, et conduisent d'ailleurs à des groupes non isomorphes, mais elles ont toutes pour principe l' « intégration » de représentations linéaires des algèbres de Lie envisagées. Dans le cours, on a donné une définition « abstraite » plus générale, par générateurs et relations, formulée axiomatiquement de façon à ce qu'elle recouvre aussi bien les groupes de Moody et Teo que ceux de Marcuson. On a pu, par la même occasion, se libérer des restrictions de caractéristique imposées par ces auteurs. L'exposé a été conçu de façon à inclure comme cas particulier la théorie des groupes algébriques *réductifs* (ou plutôt, dans un premier temps, l'étude des points rationnels de ceux-ci sur un corps : voir à ce sujet la remarque 4.4 ci-dessous). Un ingrédient essentiel de la définition est un certain ordre (ou **Z**-forme) à la Cartier-Kostant de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Kac-Moody envisagée ; la définition et l'étude de cet ordre, déjà considéré précédemment, dans un cas particulier, par H. Garland (*J. Algebra* 53, 1978, 480-551), ont occupé plusieurs leçons.

1. *Un ordre de l'algèbre enveloppante*

1.1. *Algèbres de Kac-Moody sur* **Q**

Soient J un ensemble fini (l'hypothèse de finitude n'est pas essentielle), $\mathfrak{h}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$, $A = (A_{ij})$ (avec $i, j \in J$) une matrice de Cartan généralisée et $i \mapsto h_i$, $i \mapsto \alpha_i$ des applications de J dans $\mathfrak{h}$ et son dual $\mathfrak{h}^*$ telles que $\alpha_i(h_j) = \mathrm{A}_{ji}$ pour $i, j \in J$. A ces données, on fait correspondre la $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie $L_{\mathbf{Q}}$ engendrée par $\mathfrak{h}$ et des éléments e_i, f_i $(i \in J)$ et « définie par les relations »

(1′) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \{0\}$,

(2′) $[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i \qquad (h \in \mathfrak{h})$,

(3′) $[h, f_i] = \alpha_i(h)f_i \qquad (h \in \mathfrak{h})$

et (4), (5), (6), (7). Un théorème de Kac assure que si l'on note $L_{\mathbf{Q},+}$ (resp. $L_{\mathbf{Q},-}$) l'algèbre de Lie « engendrée par les e_i (resp. les f_i) et définie par les relations (6) (resp. (7)) », alors l'application canonique $L_{\mathbf{Q},-} \oplus \mathfrak{h} \oplus L_{\mathbf{Q},+} \to L_{\mathbf{Q}}$ est bijective.

On note respectivement $U_{\mathbf{Q},-}$, $U_{\mathbf{Q},+}$ et $U_{\mathbf{Q}}$ les algèbres enveloppantes de $L_{\mathbf{Q},-}$, $L_{\mathbf{Q},+}$ et $L_{\mathbf{Q}}$. L'application produit définit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$U_{\mathbf{Q},-} \otimes S(\mathfrak{h}) \otimes U_{\mathbf{Q},+} \to U_{\mathbf{Q}},$$

où $S(\mathfrak{h})$ désigne l'algèbre symétrique de $\mathfrak{h}$.

1.2. *Un exemple*

L'exemple suivant (à rapprocher de l'exercice 7 de N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie,* chap. 8, § 4) montre que les relations (1) à (7), prises sur **Z**, ne définissent pas une « bonne » **Z**-forme de l'algèbre de Kac-Moody. Faisons $J = \{1, 2\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\dim \mathfrak{h} = 2$. On sait alors que l'algèbre

$L_{\mathbf{Q}}$ est l'agèbre de Lie simple $\mathbf{G}_2$. Or l'algèbre de Lie X sur $\mathbf{F}_2$ définie par les relations (1) à (7) est de dimension infinie. En effet, une extension immédiate du théorème de Kac cité plus haut fournit une décomposition $X = X_- + \mathbf{F}_2^2 + X_+$, où X_+ est engendré par e_1, e_2 et défini par les relations $(\operatorname{ad} e_1)^2 (e_2) = (\operatorname{ad} e_2)^4 (e_1) = 0$. D'autre part, si Y désigne l'algèbre de Lie sur $\mathbf{F}_2$ de dimension infinie dénombrable définie par les relations suivantes, où $(b_1, b_2, b_3, ...)$ représente une base de Y,

$$[b_1, b_2] = b_3,\ [b_1, b_3] = 0,\ [b_1, b_{2i}] = 0 \text{ et } [b_1, b_{2i+1}] = b_{2i+2} \text{ pour } i \geqslant 2,$$
$$[b_2, b_3] = b_4,\ [b_2, b_{2i}] = b_{2i+1} \text{ et } [b_2, b_{2i+1}] = 0 \text{ pour } i \geqslant 2,$$
$$[b_3, b_j] = b_{j+2} \text{ et } [b_j, b_k] = 0 \text{ pour } j \geqslant 4 \text{ et } k \geqslant 4,$$

on a un épimorphisme évident $X_+ \to Y$ prolongeant l'application $e_m \mapsto b_m$ $(m = 1, 2)$.

1.3. *Les anneaux $U_{\mathbf{Z}}$, $L_{\mathbf{Z}}$, $L'_{\mathbf{Z}}$*

On peut obtenir un « bon ordre » de l'algèbre de Lie $L_{\mathbf{Q}}$ en passant par l'intermédiaire de son algèbre enveloppante.

Nous choisissons désormais un réseau Λ dans $\mathfrak{h}^*$ tel que, si Λ' désigne son $\mathbf{Z}$-dual, on ait $\alpha_i \in \Lambda$ et $h_i \in \Lambda'$; ce réseau correspond au réseau des caractères d'un tore déployé maximal dans le cas des groupes réductifs déployés.

Pour tout élément x d'une algèbre associative et pour $m \in \mathbf{N}$, on pose $x^{(m)} = x^m/m\,!$ et $\binom{x}{m} = x(x-1)\dots(x-m+1)/m\,!$. Soit $U_{\mathbf{Z},+}$ (resp. $U_{\mathbf{Z},-}$; $U_{\mathbf{Z},0}$) le sous-anneau de $U_{\mathbf{Q}}$ engendré par les $e_i^{(m)}$ (resp. les $f_i^{(m)}$; les ensembles $\binom{\Lambda}{m}$) pour $i \in J$, $m \in \mathbf{N}$. Notons respectivement $L_{\mathbf{Z}}$, $L_{\mathbf{Z},-}$, $L_{\mathbf{Z},+}$ les intersections de $U_{\mathbf{Z}}$ avec les algèbres de Lie $L_{\mathbf{Q}}$, $L_{\mathbf{Q},-}$, $L_{\mathbf{Q},+}$ (identifiées à leurs images dans $U_{\mathbf{Q}}$), désignons par $L'_{\mathbf{Z},-}$ (resp. $L'_{\mathbf{Z},+}$) l'ensemble des éléments x de $L_{\mathbf{Q},-}$ (resp. $L_{\mathbf{Q},+}$) tels que $\operatorname{ad} x$ appartienne à $\operatorname{ad} U_{\mathbf{Z}}$ et posons $L'_{\mathbf{Z}} = L'_{\mathbf{Z},-} + \Lambda' + L'_{\mathbf{Z},+} \subset L_{\mathbf{Q}}$.

PROPOSITION 1. (i) *L'application produit $U_{\mathbf{Z},-} \otimes U_{\mathbf{Z},0} \otimes U_{\mathbf{Z},+} \to U_{\mathbf{Z}}$ et la somme $L_{\mathbf{Z},-} \oplus \Lambda' \oplus L_{\mathbf{Z},+} \to L_{\mathbf{Z}}$ sont des isomorphismes de modules.*

(ii) *Les ensembles $L_{\mathbf{Z}}$ et $L'_{\mathbf{Z}}$ sont des ordres de $L_{\mathbf{Q}}$.*

(iii) (Moody) *Si K est un corps de caractéristique p avec $p = 0$ ou $p > \sup \{-A_{ij} \mid i, j \in J\}$, alors la K-algèbre de Lie $L'_{\mathbf{Z}} \otimes K$ est engendrée par l'image canonique de $\Lambda' \cup \{e_i, f_i \mid i \in J\}$ dans cette algèbre.*

Pour tout corps K, nous posons $U_K = U_{\mathbf{Z}} \otimes K$, $U_{K,0} = U_{\mathbf{Z},0} \otimes K$, $U_{K,-} = U_{\mathbf{Z},-} \otimes K$, $U_{K,+} = U_{\mathbf{Z},+} \otimes K$, $L_K = L_{\mathbf{Z}} \otimes K$, etc.

2. *Modules intégrables*

2.1. *Définitions*

Un U_K-module V est dit *quasi-intégrable* si, pour tout $i \in J$ et tout $v \in V$, il existe un entier M tel que $e_i^{(m)}v = f_i^{(m)}v = 0$ pour tout $m \geqslant M$. En caractéristique zéro, cela veut dire que les e_i et les f_i sont « localement nilpotents » sur V.

A tout élément λ de Λ, associons l'homomorphisme d'anneaux $U_{K,0} \to K$ caractérisé par $\binom{\lambda'}{m} \otimes 1 \mapsto \binom{\lambda(\lambda')}{m}$ pour $\lambda' \in \Lambda$. Les homomorphismes ainsi définis sont appelés les *caractères* de $U_{K,0}$. (L'algèbre $U_{K,0}$ peut être vue comme l'algèbre des distributions à l'élément neutre d'un tore déployé sur K, et les caractères correspondent alors aux caractères de ce tore.) Nous disons que le U_K-module V est *intégrable* s'il est quasi-intégrable et s'il est somme directe de sous-espaces vectoriels stables par $U_{K,0}$ et sur lesquels $U_{K,0}$ opère par un caractère. La raison de cette terminologie apparaîtra plus loin (voir notamment la proposition 2 et le théorème 2).

Une représentation linéaire $U_K \to \operatorname{End} V$ est dite (quasi-) intégrable si elle fait de V un module (quasi-) intégrable.

2.2. *Exemples*

On montre que U_K, L_K et L'_K sont des modules intégrables pour la représentation adjointe de U_K (on définit de façon évidente la représentation adjointe de $U_\mathbf{Q}$ dans $L_\mathbf{Q}$ puis — par extension — celle de $U_\mathbf{Q}$ dans $U_\mathbf{Q}$, ensuite — par restriction — celle de $U_\mathbf{Z}$ dans $U_\mathbf{Z}$, $L_\mathbf{Z}$ et $L'_\mathbf{Z}$ et enfin — par tensorisation — celle de U_K dans U_K, L_K et L'_K). De même, si V est un $L_\mathbf{Q}$-module irréductible avec poids dominant (les modules de ce type ont été définis et étudiés par V. Kac) et si v est un vecteur de poids dominant, le module V considéré comme $U_\mathbf{Q}$-module est intégrable et il en est de même du U_K-module $U_\mathbf{Z}(v) \otimes K$.

2.3. *Le cas de* $\mathbf{SL}_2$

Plaçons-nous dans le cas particulièrement simple où l'algèbre de Lie $L_\mathbf{Z}$ est l'algèbre de Lie (sur $\mathbf{Z}$) du groupe $\mathbf{SL}_2$, c'est-à-dire le cas où $J = \{1\}$, $A = (2)$, $\Lambda' = \mathbf{Z}h_1$, et posons $e_1 = e$, $f_1 = f$, $h_1 = h$. Les représentations quasi-intégrales sont alors celles qui proviennent de représentations rationnelles localement finies du groupe $\mathbf{SL}_2$; elles sont automatiquement intégrables. Si l'on se borne à considérer le groupe « abstrait » des points rationnels, cela se traduit par l'énoncé suivant.

Proposition 2. *Si V est un U_K-module quasi-intégrable, il existe une* *représentation linéaire* $\varrho : \mathbf{SL}_2(K) \to \mathrm{GL}(V)$ *telle que, pour* $v \in V$ *et* $t \in K$, *on ait*

$$(8) \quad \varrho\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(v) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m e^{(m)} v, \qquad \varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}(v) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m f^{(m)} v.$$

De plus, le module V *est intégrable et si* $U_{K,0}$ *opère sur* v *par le caractère associé à* $\lambda \in \Lambda$, *on a, pour* $t \neq 0$,

$$(9) \quad \varrho\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}(v) = t^{\lambda(h)} v.$$

Symboliquement, les relations (8) et (9) peuvent s'écrire

$$(10) \quad \varrho\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp te, \qquad \varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \exp tf, \qquad \varrho\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = t^h.$$

LEMME. *Pour* $n \in \mathbf{N}$, *l'idéal bilatère* $U_{\mathbf{Z}}{}^{(n)}$ *de* $U_{\mathbf{Z}}$ *engendré par les* $e^{(i)}$ *pour* $i \geqslant n$ *coïncide avec l'idéal bilatère engendré par les* $f^{(i)}$ $(i \geqslant n)$. *Le* $\mathbf{Z}$*-module* $U_{\mathbf{Z}}{}^{(n+1)}$ *est facteur direct du* $\mathbf{Z}$*-module* $U_{\mathbf{Z}}{}^{(n)}$ *et les éléments* $e^{(r)} f^{(n)} e^{(s)}$ *avec* $r, s \in \{0, ..., n\}$ *engendrent librement un supplémentaire du premier dans le second. En particulier,* $U_{\mathbf{Z}}{}^{(n)}$ *est facteur direct de* $U_{\mathbf{Z}}$.

(N.B. Si α_n désigne la représentation irréductible de $U_{\mathbf{C}}$ de dimension $n+1$, on a $U_{\mathbf{Z}}{}^{(n)} = (\bigcap_{i<n} \operatorname{Ker} \alpha_i) \bigcap U_{\mathbf{Z}}$ et, par rapport à une base convenablement choisie dans l'espace de la représentation α_n, $\alpha_n(\Sigma\, c_{rs} e^{(r)} f^{(n)} e^{(s)})$ est la matrice (c_{rs}).)

2.4. *Application au cas général*

Revenons au cas d'une matrice A et d'un réseau Λ quelconques. Pour tout $i \in J$, on a un homomorphisme de l'algèbre considérée en 2.3 (algèbre notée là $U_{\mathbf{Z}}$) dans $U_{\mathbf{Z}}$ qui envoie $e^{(m)}$, $f^{(m)}$, $\binom{h}{m}$ sur $e_i{}^{(m)}$, $f_i{}^{(m)}$, $\binom{h_i}{m}$ respectivement. La proposition 2 permet alors d'associer à toute représentation linéaire $\varrho : U_K \to \operatorname{End} V$ quasi-intégrable et à tout $i \in J$ une représentation $\mathbf{SL}_2(K) \to \mathrm{GL}(V)$, notée ϱ_i, et définie, avec les conventions de 2.3 (10), par

$$\varrho_i\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp te_i, \qquad \varrho_i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \exp tf_i.$$

COROLLAIRE. *Si* Λ' *est engendré par les* h_i, *tout* U_K*-module quasi-intégrable est intégrable.*

---

(1) La mise en évidence de ce lemme, à l'occasion du cours, a résulté de discussions avec J.-P. Serre.

3. *Groupes*

3.1. *Principe de construction*

La méthode utilisée pour définir « abstraitement » (voir l'introduction) des groupes associés au système $(A, \Lambda, (\alpha_i, h_i))$ est basée sur une propriété connue des groupes avec BN-paire (B, N) : un tel groupe est le produit amalgamé de N et des sous-groupes paraboliques P_i $(i \in J)$ minimaux parmi les sous-groupes contenant B et distincts de B (cf. Tits, *Springer Lecture Notes* n° 386, proposition 13.3). Dans le cas présent, on définit le groupe N par générateurs et relations (cf. 3.2), on prend pour B le produit semi-direct de Hom $(\Lambda, K^{\times})$ avec un sous-groupe approprié du groupe multiplicatif d'un complété de l'algèbre $U_{K,+}$ (cf. 3.4) et l'on obtient P_i en « combinant » B avec un groupe $\mathbf{SL}_2(K)$ à l'aide de la proposition 2 (cf. 3.4) ; ces choix sont évidemment suggérés par le cas particulier des groupes réductifs déployés.

3.2. *Le groupe N*

On pose $H = \text{Hom}\,(\Lambda, K^{\times})$. Pour $\lambda' \in \Lambda'$ et $k \in K^{\times}$, on note $k^{\lambda'}$ l'élément de H défini par $\lambda \mapsto k^{\lambda(\lambda')}$ $(\lambda \in \Lambda)$. Pour $i \in J$, soit r_i la « réflexion » $\lambda \mapsto \lambda - \lambda(h_i)\,\alpha_i$ de Λ. Nous notons aussi r_i l'automorphisme de H induit par cette réflexion. Pour $i, j \in J$, soit $c_{ij} \in \{1, 2, 3, 4, 6, \infty\}$ défini comme suit :

si $i = j$, $c_{ij} = 1$;

si $A_{ij}A_{ji} = 0, 1, 2$ ou 3, alors $c_{ij} = 1, 2, 3$ ou 6 respectivement ;

si $i \neq j$ et $A_{ij}A_{ji} \geqslant 4$, alors $c_{ij} = \infty$.

Enfin, soit $M = \{m_i \mid i \in J\}$ un ensemble indexé par J. On appelle N le groupe « engendré par l'ensemble $H \cup M$ et défini par les relations suivantes » :

un système de relations définissant le groupe H,

$$m_i h m_i^{-1} = r_i(h) \qquad (i \in J, h \in H),$$

$$m_i^2 = (-1)^{h_i} \qquad (i \in J),$$

$$\underbrace{m_i m_j m_i \ldots}_{c_{ij} \text{ facteurs}} = \underbrace{m_j m_i m_j \ldots}_{c_{ij} \text{ facteurs}} \qquad (i, j \in J).$$

L'ensemble $H \cup M$ s'injecte dans N (cf. *J. Algebra* 4, 1966, 96-116) et sera identifié à son image dans ce groupe. On vérifie que $W = N/H$ est le groupe de Coxeter associé à la matrice (c_{ij}) (c'est une application facile du lemme 1 de l'exposé n° 288 au *Séminaire Bourbaki* de février 1965). Pour $i \in J$, nous notons r_i l'image m_iH de m_i dans W ; cette convention se justifie par le fait qu'il existe une action de W sur Λ telle que m_iH opère précisément par la réflexion r_i ; l'action induite de W sur H est celle provenant de l'action de N sur H par conjugaison.

3.3. *Racines*

On appelle *racine* tout élément non nul α de Λ tel que

$$\{x \in L_{\mathbf{C}} \mid (\operatorname{ad} \lambda')(x) = \alpha(\lambda')x \text{ pour tout } \lambda' \in \Lambda'\} \neq \{0\}.$$

Soit Π l'ensemble des racines. Une description explicite de cet ensemble, due à V. Kac (*Inventiones Math.* 56, 1980, 57-92), a été donnée dans le cours et des exemples ont été développés. L'ensemble Π est invariant par W (pour l'opération décrite en 3.2). Les racines appartenant à $\bigcup_{i \in J} (W\alpha_i)$ sont dites *principales* (ou « réelles », dans la terminologie de Kac) ; leur ensemble est noté Π^{pr} et l'on pose $\Pi^{\text{pr}}_+ = \Pi^{\text{pr}} \cap (\sum_{i \in J} \mathbf{N}\alpha_i)$.

3.4. *Les groupes B et P_i*

L'algèbre $U_{K,+}$ possède une $\mathbf{N}^J$-graduation, graduation pour laquelle l'élément $e_i^{(m)}$ est homogène de degré $j \mapsto \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). On en déduit une $\mathbf{N}$-graduation (définie par $\deg e_i^{(m)} = m$), on note $\hat{U}_{K,+}$ le complété de $U_{K,+}$, pour cette dernière et l'on désigne par $U^{(1)}$ le groupe (multiplicatif) des éléments de $\hat{U}_{K,+}$ qui sont congrus à 1 modulo l'idéal engendré (topologiquement) par les éléments de degré strictement positif.

Appliquant 2.4 à la représentation adjointe ad de U_K, on obtient, pour tout $i \in J$, un homomorphisme ad_i de $\mathbf{SL}_2(K)$ dans Aut U_K, homomorphisme que, conformément à la tradition, nous appellerons plutôt Ad_i. Posons $\overline{r_i} = \operatorname{Ad}_i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U_{K,+,i} = U_{K,+} \cap \overline{r_i}(U_{K,+})$ et notons $\hat{U}_{K,+,i}$ l'adhérence de $U_{K,+,i}$ dans $\hat{U}_{K,+}$ et $U_i^{(1)}$ l'intersection de cette adhérence avec $U^{(1)}$. L'algèbre $U_{K,+,i}$ est stable par $\overline{r_i}$; l'extension à $\hat{U}_{K,+,i}$ de la restriction de $\overline{r_i}$ à $U_{K,+,i}$ sera aussi notée $\overline{r_i}$. Le groupe H opère de façon évidente sur U_K (un homomorphisme $\eta : \Lambda \to K^\times$ multiplie $e_i^{(m)}$ et $f_i^{(m)}$ respectivement par $\eta(\alpha_i)^m$ et $\eta(\alpha_i)^{-m}$), sur $U_{K,+}$ (par restriction) et sur $\hat{U}_{K,+}$ (par extension) ; cette dernière action préserve $\hat{U}_{K,+,i}$ et $U_i^{(1)}$. On vérifie assez facilement que l'opération de H sur U_K se prolonge en une opération de N, l'élément m_i opérant par $\overline{r_i}$.

Pour tout $i \in J$, soit L_i le groupe des points rationnels sur K du groupe réductif déployé de rang semi-simple un dont un tore maximal a Λ pour groupe des caractères et dont $\pm \alpha_i$ sont les racines et $\pm h_i$ les coracines. Cela revient à dire que L_i est un groupe contenant H et qu'il existe un homomorphisme σ_i : $\mathbf{SL}_2(K) \to L_i$ tel que $L_i = \operatorname{Im} \sigma_i . H$, et que, pour $t \in K^\times$, $h \in H = \operatorname{Hom}(\Lambda, K^\times)$ et $k \in K$ on ait

$$\sigma_i\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = t^{h_i}$$

$$h . \sigma_i\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . h^{-1} = \sigma_i\begin{pmatrix} 1 & h(\alpha_i)k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h . \sigma_i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} . h^{-1} = \sigma_i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h(\alpha_i)^{-1}k & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit α une racine principale « positive », c'est-à-dire appartenant à Π^{pr}_{+}. Par définition, il existe $w \in W$ et $i \in J$ tels que $\alpha = w\alpha_i$. Soit m un représentant de w dans N. On montre que $m(e_i{}^{(s)}) \in U_{K,+,i}$ pour tout $s \in \mathbf{N}$ et que l'ensemble

$$\{ \sum_{s=0}^{\infty} t^s m(e_i{}^{(s)}) \mid t \in K\}$$

est un sous-groupe de $U_i{}^{(1)}$ dépendant seulement de α ; nous le notons Y_α et, pour $i \in J$, nous posons $Y_i = Y_{\alpha_i}$ (d'où $Y_i = \{ \sum_{s=0}^{\infty} t^s e_i{}^{(s)} \mid t \in K\}$).

Venons enfin à la définition des groupes B et P_i. Celle-ci implique le choix d'un sous-groupe X de $U^{(1)}$ assujetti aux conditions suivantes, où l'on pose $X_i = X \cap U_i{}^{(1)}$:

(i) X est stable par H (donc X_i l'est aussi) ;

(ii) pour $i \in J$ on a $X = X_i Y_i$ (le produit étant automatiquement semi-direct) ;

(iii) X_i est stable par $\bar{r}_i$.

Utilisant 2.4 (appliqué à nouveau à la représentation adjointe de U_K), on vérifie que l'opération de H sur X_i s'étend de façon unique en une opération de L_i telle que $\sigma_i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ agit par $\bar{r}_i$ et que $\sigma_i\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la conjugaison par l'élément « $\exp te_i$ » ($= \sum t^s e_i{}^{(s)}$) de Y_i. Nous prenons pour B le produit semi-direct de H par X et pour P_i le produit semi-direct de L_i par X ; dans P_i, on identifie l'élément $\sigma_i\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de L_i avec $\exp te_i$, de sorte que $B \subset P_i$. Le sous-groupe N_i de N engendré par H et m_i s'injecte naturellement dans P_i par $H \xrightarrow{\mathrm{id}} H$ et $m_i \mapsto \sigma_i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.5. *Principaux résultats*

THÉORÈME 1. *Soit G le produit des groupes P_i ($i \in J$) et N amalgamés selon les sous-groupes B (qui s'injecte dans chaque P_j) et N_i (qui s'injecte dans N et P_i). Alors les homomorphismes canoniques $P_i \to G$ et $N \to G$ sont injectifs et (B, N) est une BN-paire dans G, de groupe de Weyl W.*

Cela résulte d'un lemme général d'existence de **BN**-paires (cf. *C.R. Acad. Sci.*, Série I, 293, 1981, 317-322).

Le théorème suivant, dont nous ne donnons ici qu'un énoncé heuristique, d'ailleurs facile à préciser, est conséquence immédiate de la proposition 2 et des définitions.

THÉORÈME 2. *Toute représentation intégrable de U_K « s'intègre » en une représentation linéaire du groupe G du théorème* 1.

Appliqué à la représentation adjointe et aux représentations à poids dominant, ce théorème établit le lien entre G et les groupes de Moody-Teo et de Marcuson (voir l'introduction).

3.6. *Existence de X*

En caractéristique zéro, on déduit facilement de la formule de Campbell-Hausdorff que l'adhérence de $\exp L_{K,+}$ dans $U^{(1)}$ est un groupe possédant les propriétés (i) à (iii) de 3.4. En prenant celui-ci comme groupe X, on obtient pour groupe G les groupes de Marcuson (pour des choix appropriés de Λ).

Pour prouver l'existence d'un groupe X en caractéristique $p \neq 0$, on considère l'adhérence de $(\exp L_{\mathbf{C},+}) \cap U_{\mathbf{Z},+}$, on réduit mod p et l'on sature le groupe obtenu par l'action de H.

Une fois établie l'existence d'*un* groupe X possédant les propriétés requises, on voit aussitôt qu'il en existe un plus petit, que nous noterons $X^{\min}$, à savoir le groupe engendré par les Y_α pour $\alpha \in \Pi^{\mathrm{pr}}_+$. Les groupes de Moody et Teo correspondent au choix $X = X^{\min}$, $\Lambda = \Sigma\, \mathbf{Z}\alpha_i$. Notons que le groupe G défini à partir de $X = X^{\min}$ fait jouer un rôle symétrique aux e_i et aux f_i (même si cela n'est pas apparent dans la définition). Cela n'est plus vrai pour d'autres choix de X, par exemple pour l'adhérence $\overline{X}^{\min}$ de $X^{\min}$ dans $U^{(1)}$.

4. *Remarques finales et questions*

4.1. La considération des groupes algébriques simples sur les corps de séries formelles en caractéristique finie indique que l'anneau $U_{\mathbf{Z}}$ défini en 1.3. n'est qu'un « bon ordre » de $U_{\mathbf{Q}}$ parmi d'autres. Il semble que la liberté de choix augmente rapidement avec la profusion de racines non principales. Mais il convient d'abord de « bien poser » le problème.

4.2. Il serait intéressant de voir ce qu'on peut dire des divers groupes X possibles. En caractéristique zéro, $\overline{X}^{\min}$ apparaît comme le plus grand groupe X « intéressant » (le choix d'un groupe X plus gros ne fait que doter G d'un sous-groupe distingué « parasite », contenu dans X).

4.3. La BN-paire (B, N) donne lieu à une décomposition de Bruhat

$$G = \bigcup_{w \in W} BwB$$

Pour $w \in W$, posons $C(w) = BwB/B$. Dans W, on introduit classiquement la relation d'ordre suivante : pour $w, w' \in W$, on écrit $w' \leqslant w$ s'il existe une décomposition réduite de w (c'est-à-dire une expression de w comme mot de longueur minimum en les r_i) telle qu'en effaçant certains facteurs on obtienne une décomposition de w'. Pour $w \in W$, notons $\overline{C}(w)$ la « variété de Schubert » $\bigcup_{w' \leqslant w} C(w')$.

Supposons le corps K algébriquement clos. Le cas des groupes réductifs de dimension finie (cas où A est une matrice de Cartan ordinaire) suggère le problème de doter $\overline{C}(w)$ d'une structure de variété projective, première étape de l'étude algébro-géométrique du groupe G. Dans le cours, ce problème a été résolu pour $w = r_i r_j$ $(i \neq j)$: on a montré que $\overline{C}(w)$ est alors, de façon naturelle, un fibré en droites projectives sur une droite projective, fibré dont l'invariant est l'entier $-A_{ij}$ (rappelons que les classes d'isomorphisme de fibrés en droite projective sur une droite projective sont en correspondance bijective canonique avec les entiers naturels). Cela donne une interprétation géométrique simple de la matrice de Cartan généralisée A en termes de la « variété de drapeaux » G/B. Pour w quelconque, P. Deligne m'a montré le chemin à suivre via une désingularisation à la Demazure de $\overline{C}(w)$; il reste cependant des problèmes techniques à résoudre, principalement en caractéristique non nulle.

4.4. Fixons comme précédemment les données A, Λ, $\{\alpha_i\}$, $\{h_i\}$ et, pour tout corps K, soit $G(K)$ le groupe associé à K pour un choix « fonctoriel » de X (par ex. $X = X^{\min}$ ou $X = \overline{X}^{\min}$). On a ainsi un foncteur en groupes $K \mapsto G(K)$ sur la catégorie des corps et l'on souhaite évidemment l'étendre à la catégorie des anneaux, si possible en un faisceau en groupes (par exemple pour la topologie de Zariski) ou même, probablement, un ind-proschéma. Le procédé utilisé plus haut ne peut être appliqué mécaniquement car, déjà dans le cas classique, le groupe $G(K)$ n'a généralement pas de BN-paire naturelle lorsque K est un anneau quelconque. On peut cependant espérer atteindre le but à l'aide d'une « décomposition de Bruhat schématique » et grâce à une bonne compréhension de la structure ind-schématique de G/B.

Il faudrait par ailleurs généraliser le point de vue adopté jusqu'ici de façon à inclure le cas des tores sur les anneaux de séries formelles considérés comme objets géométriques sur l'anneau de base. Ce cas a été examiné par P. Deligne ; il fait apparaître des phénomènes curieux, inconnus en dimension finie (notamment, l'existence pour les ind-proschémas en question, d'un « épaississement » infinitésimal d'ordre non borné).

Ces diverses questions, parmi d'autres, seront étudiées dans le cours de l'an prochain.

J. T.

Quatre exposés de séminaire par P. Slodowy (Bonn) ont été consacrés au sujet suivant :

Groups associated with Kac-Moody algebras and deformation of singularities.

Publications

J. Tits, *Le principe d'inertie en relativité générale* (*Bull. Soc. Math. Belg.*, 31, 1979, 171-197).

— *Four presentations of Leech's lattice* (in *Finite Simple Groups* II, *Proc. of a London Math. Soc. Research Symposium,* Durham, 1978, ed. M. J. Collins, Academic Press, 1980, 303-307).

— *Buildings and Buekenhout geometries* (*ibid.,* 309-320).

— *Géométrie de l'espace, du temps et de la causalité : la voie axiomatique,* Extraits d'une conférence faite à Halle en 1980 (*Mélanges Paul Libois,* Bruxelles, 1981, 291-296).

— Exposé fait à l'occasion de la Commémoration du 450^{e} anniversaire du Collège de France (*C.R. de la Réunion extraordinaire des professeurs,* Coll. de Fr., 1981, 9-11).

— Appendice à l'article de M. Gromov : *Groups of polynomial growth and expanding maps* (*Publ. Math. I.H.E.S.* 53, 1981, 74-78).

Missions et conférences

Cours

Groups of polynomial growth and related questions, Yale University, septembre-décembre 1980.

Exposés

— *Coxeter graphs and incidence geometry : a survey,* Geometry symposium (60th birthday N.H. Kuiper), Utrecht, août 1980.

— *On a theorem of L.K. Hua,* Algebra seminar, Yale, septembre 1980.

— *Automorphisms of unitals,* ibid., septembre 1980.

— *BN-pairs with infinite Weyl groups,* M.I.T., octobre 1980.

— *Free buildings,* Inst. for Advanced Study, Princeton, novembre 1980.

— *Maximal subgroups of infinite linear groups (after G.A. Margulis),* Rutgers, novembre 1980.

— *Suzuki and Ree groups over non perfect fields,* Algebra seminar, Yale, décembre 1980.

— *Groupes à croissance polynomiale (d'après M. Gromov et al.),* Séminaire Bourbaki, Paris, février 1981.

— *La notion d'immeuble,* Séminaire de Philosophie et mathématiques, E.N.S., Paris, mars 1981.

— *Generalized Cartan matrices, infinite dimensional Chevalley groups and associated buildings,* Interuni. Sem. on Combinatorial geometry, Bruxelles, avril 1981.

— *Genèse de la notion d'immeuble,* Conf. à l'occasion du 80e anniversaire de P. Libois, Bruxelles, avril 1981.

— *Buildings and their applications to group representations,* trois exposés, Herakleion, avril 1981.

— *Immeubles et caractère de Steinberg,* Séminaire Chevalley, Paris, mai 1981.

— *Groupes de Suzuki et de Ree sur les corps non parfaits,* ibid., mai 1981.

— *Universal enveloping algebras and generalized Chevalley groups,* Journées « Groupes et langages », Amiens, mai 1981.