Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *mardi* a été consacré à l'étude, sous différentes hypothèses, de l'algèbre de Lie graduée T des tenseurs (contravariants antisymétriques) holomorphes attachée à une variété kählerienne compacte W, de dimension complexe n. Sur l'espace T qui admet une structure d'algèbre extérieure, une structure naturelle d'algèbre de Lie graduée est donnée par le crochet de Schouten-Nijenhuis qui généralise la dérivée de Lie par un champ de vecteurs. L'algèbre T ne dépend que de la structure complexe de la variété, mais admet des propriétés remarquables si la variété admet une métrique kählerienne.

Soit T^r l'espace des r-tenseurs holomorphes. J'ai introduit naguère le sous-espace complexe I^r de T^r défini par les éléments A de T^r qui annulent toute r-forme holomorphe de W. On est ainsi amené à considérer le sous-espace I de T donné par :

$$I = \sum_{r=1}^{n} I^r$$

On établit que :

$$[T, T] \subset I$$

et que par suite *I est un idéal de T* pour sa structure d'algèbre de Lie graduée. On montre aussi que I est un idéal de T pour sa structure d'algèbre extérieure. On note que tout élément de T admettant des zéros sur W est un élément de I.

Dans le cas r = 1, l'idéal I^1 de l'algèbre des vecteurs holomorphes sur W s'interprète aisément en termes de variété d'Albanese et d'application de Jacobi. Carell et D. Lieberman ont établi que les éléments de I^1 sont exactement les vecteurs holomorphes admettant des zéros. En simplifant leur démonstration cohomologique, on a pu mettre en évidence des cas de variétés kähleriennes, pour lesquels tout élément de I admet des zéros sur W. Le problème de la caractérisation de telles variétés demeure ouvert.

La dualité définie par la métrique et la conjugaison complexe déterminent une application bijective antilinéaire σ de l'espace des r-tenseurs de type (r, 0) sur l'espace des r-formes de type (r, 0). Nous avons rappelé la caractérisation, que nous avons donnée antérieurement, des tenseurs holomorphes A en termes de $\sigma(A)$ et des opérateurs différentiels classiques sur les formes donnés par la géométrie kählerienne. La considération de la première classe de Chern de W conduit à introduire un scalaire $f > 0$ sur la variété qui détermine des sous-espaces $U^r(f)$ de T^r donnés par les éléments A vérifiant :

$$\delta' \{f \sigma(A)\} = 0$$

Si l'on pose :

$$U(f) = \sum_{r=1}^{n} U^r(f)$$

on établit aisément que le produit extérieur opère sur U (f) et que l'on a :

$$U(f) \cap I = \{0\} \qquad [U(f), U(f)] = 0$$

Par une méthode intégrale un peu sophistiquée, on a pu démontrer que *U (f) appartient nécessairement en fait au centre de T.* Il est naturel de se demander s'il existe des cas où T admet une décomposition en somme directe de I et de U (f) pour un scalaire f convenable.

Ce problème a été étudié dans le cas d'une variété admettant *une métrique kählerienne extrémale* au sens de Calabi ; une telle métrique rend extrémale, par rapport aux déformations kähleriennes, l'intégrale du carré de la courbure scalaire. On a montré que, lorsqu'il en est ainsi, T est effectivement somme directe d'idéaux.

$$T = I \oplus U$$

où U appartient au centre de T, chaque élément de U étant sans zéro sur W. Une partie de cette théorie a été mise en rapport avec le théorème d'Aubin-Yau.

Si la variété W est à première classe de Chern non négative et si $b_{2,0}(W) \neq 0$, on déduit de cette théorie que la variété admet des feuilletages holomorphes en sous-variétés symplectiques complexes, feuilletages invariants par le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W.

*
**

Le cours du *mercredi* a porté sur la géométrie des variétés pfaffiennes et des variétés de contact. Il avait pour but d'établir les instruments géométriques d'une future étude de cohomologies associées à une variété de contact.

Une *structure pfaffienne* est définie, sur une variété W de dimension $(2n + 1)$, par une 1-forme ω telle que $\omega \wedge (d\omega)^n$ soit partout $\neq 0$. Nous avons vu antérieurement qu'une telle structure peut être aussi décrite de manière contravariante sur W par le couple (E, Λ) d'un champ de vecteurs E (champ de Reeb) et d'un 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ reliés par des relations différentielles convenables.

Les structures de contact qui ont été envisagées sont *les structures de contact orientées,* c'est-à-dire celles qui sont induites par des structures pfaffiennes conformes. Une telle structure de contact est en correspondance biunivoque avec une structure symplectique exacte $\tilde{\omega}$, homogène d'ordre un, du fibré canonique K de W défini par les $(2n + 1)$-formes positives en tous les points de W. On est ainsi conduit à une « *symplectisation* » d'une variété de contact, distincte de celle d'Arnold, qui présente cet avantage que la variété de base K ne dépend que de W et non de la structure de contact qu'elle porte.

Pour disposer d'instruments géométriques, on a consacré la première partie du cours à l'étude de connexions linéaires sans torsion associées naturellement à *une variété pfaffienne* (W, ω). A partir de connexions symplectiques convenables, introduites sur $(K, \tilde{\omega})$, on a montré que (W, ω) admet des connexions privilégiées, dites *faiblement pfaffiennes,* et, en particulier, *des connexions pfaffiennes* pour lesquelles la 2-forme $d\,\omega$ et le vecteur de Reeb E sont tous deux à dérivée covariante nulle. Pour un groupe de Lie G d'automorphismes de la structure pfaffienne, on a étudié l'existence de connexions pfaffiennes G-invariantes.

Dans une seconde partie du cours, on a analysé comment une structure de contact sur W peut être décrite soit de manière covariante par une 1-forme densité π de poids-$1/(n + 1)$ convenable, soit de manière contravariante par un objet géométrique $(\mathscr{C}, \mathscr{L})$, où $\mathscr{L}$ est un 2-tenseur densité de poids $1/(n + 1)$. L'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de la variété de contact (W, π) est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie définie par $(\mathscr{C}, \mathscr{L})$ sur l'espace des densités scalaires de W de poids-$1/(n + 1)$. L'introduction sur $(K, \tilde{\omega})$ d'une connexion symplectique $\tilde{\Gamma}$ convenable, invariante par homothétie, conduit à introduire sur W une famille de connexions faiblement pfaffiennes pour les différents représentants de la structure de contact. Cela se traduit par la mise en évidence d'objets géométriques qui ne dépendent que de la structure de contact et du choix de la connexion symplectique $\tilde{\Gamma}$. Le cas du fibré des directions cotangentes d'une variété différentiable, et en particulier d'un espace homogène a été étudié ; on sait son importance en ce qui concerne la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, à symboles principaux homogènes, sur une variété différentiable.

A. L.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

M. Cahen, Champs sur les espaces de Minkowski compactifiés.

E. Combet, Sur la géométrie des intégrales exponentielles.

D.A. Iadczyk, Supersymmetric fields theories.

B. Julia, Supersymétrie et progrès récents en gravitation.

T. Damour, Freinage de rayonnement en Relativité générale.

B. Carter, Théorie des champs non affines et unicité du trou noir électromagnétique par la méthode de Bunting.

L. Lusanna, Recent developments in relativistic particle mechanics.

R. Matzner, Colliding plane waves in expanding cosmologies.

C. Moreno, Déformations, issues de la quantification, de l'algèbre des fonctions sur les espaces hermitiens symétriques.

C. de Witt, Equations différentielles stochastiques sur les fibrés et applications.

Missions et conférences

M. André Lichnerowicz a donné un cours au Centre international de Mécanique théorique de Udine (septembre 81) et coprésidé la réunion des Mathématiciens d'expression latine qui s'est tenue à Luxembourg en septembre 81. Il a donné une conférence générale au Symposium Maxwell organisé par l'American Mathematical Society à Amherst (octobre 81). Il a présidé le comité scientifique du Colloque international sur les progrès récents en dynamique analytique organisé à Turin par l'Union internationale de Mécanique en juin 82. Il a participé aux journées relativistes de Lyon (avril 82), aux journées de Géométrie différentielle organisées par les Universités de Strasbourg et Mulhouse (mai 82), au colloque concernant les Mathématiques appliquées aux phénomènes naturels qui s'est tenu au Centre International de Recherche mathématique de Luminy en mai 82.

M. Lichnerowicz a donné des conférences au Massachusetts Institute of Technology, au Courant Institute de New York, à l'Université du Koweit, aux Universités de Rome, Madrid, Valence, Turin et Bruxelles.

PUBLICATIONS

A. LICHNEROWICZ, *Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les *-produits)* (*Ann. Inst. Fourier,* t. 32, 1982, 157-209).

— *Maxwell and geometrical Dynamics (Maxwell Symposium)* (*Bull. of Amer. Math. Soc.,* à paraître).

— *Tenseurs holomorphes sur une variété kählerienne* (*Publ. de l'Ist. di Alta Matematica,* Rome, 1982).

— *Sur les cohomologies attachées à une variété de contact* (*Comptes rendus Ac. Sc. Paris,* t. 294, I, 1982, 407-412).

H. BASART et A. LICHNEROWICZ, *Déformations d'un star-produit sur une variété symplectique* (*Ibidem,* t. 293, I, 1981, 347-351).