Théorie des groupes

M. Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année était une suite du précédent : d'autres aspects des *algèbres de Kac-Moody* et des groupes qu'on peut leur associer ont été envisagés. Dans ce qui suit, la référence [RC 80-81] renvoie au résumé du cours de l'année dernière (Annuaire du Collège de France 1980-1981, pp. 75-86).

ALGÈBRES DE LIE

1. *Généralités. Les diverses algèbres associées à une même matrice de Cartan généralisée*

1.1. Rappelons les données de base de la théorie. On considère un ensemble fini I, un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de dimension finie, un système $(h_i \mid i \in I)$ d'éléments de $\mathfrak{h}$ et un système $(\alpha_i \mid i \in I)$ d'éléments du dual $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{h}$ (dual noté $\mathfrak{h}^*$ dans [RC 80-81]), tels que la matrice $A = (\alpha_j(h_i))$ soit une matrice de Cartan généralisée. A un tel système $\mathscr{R} = (\mathfrak{h}, (h_i, \alpha_i))$ est associée une $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie $L(\mathscr{R})$, algèbre engendrée par $\mathfrak{h}$ et par des éléments e_i et f_i $(i \in I)$, et définie par les relations bien connues, pour lesquelles nous renvoyons à [RC 80-81], n° 11 (où $L(\mathscr{R})$ est notée $L_{\mathbf{Q}}$).

1.2. Pour tout sous-espace $\mathfrak{x}$ de $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}'$), notons $\mathfrak{x}^\circ$ son annulateur dans $\mathfrak{h}'$ (resp. $\mathfrak{h}$). Posons $\mathfrak{c} = (\sum_i \mathbf{Q}\alpha_i)^\circ \subset \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{c}' = (\sum_i \mathbf{Q}h_i)^\circ \subset \mathfrak{h}'$. Si $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$ sont des sous-espaces de $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ respectivement, orthogonaux entre eux, nous désignons par $\mathfrak{n}'\backslash\mathscr{R}/\mathfrak{n}$ le système que l'on déduit de $\mathscr{R}$ en remplaçant $\mathfrak{h}$ par $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{n}'^\circ/\mathfrak{n}$, les h_i par leurs projections canoniques dans $\mathfrak{h}_1$ et les α_i par leurs projections canoniques dans le dual $\mathfrak{n}^\circ/\mathfrak{n}'$ de $\mathfrak{h}_1$. Lorsque $\mathfrak{n}'$ (resp. $\mathfrak{n}$) est réduit à 0, on pose $\mathfrak{n}'\backslash\mathscr{R}/\mathfrak{n} = \mathscr{R}/\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}'\backslash\mathscr{R}$). L'algèbre de Lie $L(\mathscr{R})$ est extension centrale de $L(\mathscr{R}/\mathfrak{n})$ par $\mathfrak{n}$ et produit semi-direct de l'algèbre $L(\mathfrak{n}'\backslash\mathscr{R})$ (idéal de $L(\mathscr{R})$) et d'une algèbre commutative de dérivations de celle-ci, à savoir, n'importe quel supplémentaire de $\mathfrak{n}'^{\circ}$ dans $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{d}$ est un espace vectoriel complexe de dimension finie, nous posons $\mathcal{R} \oplus \mathfrak{d} = (\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{d}, (h_i, \alpha_i))$, et nous disons que $\mathfrak{d}$ est un *facteur direct central* de $\mathcal{R} \oplus \mathfrak{d}$.

1.3. Dans la littérature sur les algèbres de Kac-Moody, la plupart des auteurs se donnent au départ une matrice de Cartan généralisée A et choisissent $\mathfrak{h}$ selon leur convenance, ce choix variant d'un article à l'autre. Il est donc utile, bien qu'il s'agisse là d'un simple exercice, de décrire tous les systèmes $\mathcal{R}$ correspondant à une matrice A donnée. Le résultat peut s'énoncer ainsi :

La matrice A étant donnée, il existe un unique système $\tilde{\mathcal{R}} = (\tilde{\mathfrak{h}}, (\tilde{h}_i, \tilde{\alpha}_i))$ sans facteur direct central non nul, tel que $(\tilde{\alpha}_j(\tilde{h}_i)) = A$, que les $\tilde{h}_i$ soient linéairement indépendants et qu'il en soit de même des $\tilde{\alpha}_i$. Les espaces $\tilde{\mathfrak{c}} = (\sum_i \mathbf{Q}\tilde{\alpha}_i)^{\circ}$ et $\tilde{\mathfrak{c}}' = (\sum_i \mathbf{Q}\tilde{h}_i)^{\circ}$ ont pour dimension le corang de A. Tout système $\mathcal{R}$ tel que $(\alpha_j(h_i)) = A$ peut s'écrire $(\tilde{\mathfrak{n}}'\backslash\tilde{\mathcal{R}}/\tilde{\mathfrak{n}}) \oplus \mathfrak{d}$, avec $\tilde{\mathfrak{n}} \subset \tilde{\mathfrak{c}}$ et $\tilde{\mathfrak{n}}' \subset \tilde{\mathfrak{c}}' \cap \tilde{\mathfrak{n}}^{\circ}$. Les sous-espaces $\tilde{\mathfrak{n}}$ et $\tilde{\mathfrak{n}}'$ sont déterminés par $\mathcal{R}$ et forment avec l'entier dim $\mathfrak{d}$ *un système complet d'invariants du système $\mathcal{R}$.*

1.4. La proposition suivante concerne le cas, le plus couramment envisagé, où les h_i forment une base de $\mathfrak{h}$ (i.e. $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{d} = \{0\}, \tilde{\mathfrak{n}}' = \tilde{\mathfrak{c}}'$). Elle généralise à une matrice A quelconque un résultat de H. Garland (*Publ. Math. I.H.E.S.*, 52, 1980, 5-133) et R.L. Wilson (en cours de publication) relatif au cas « semi-défini » (voir ci-dessous, n° 1.6).

PROPOSITION. — *Si les h_i forment une base de $\mathfrak{h}$, toute extension centrale de l'algèbre de Lie $L(\mathcal{R})$ est scindée* (1).

1.5. L'algèbre de Lie $L(\mathcal{R})$ possède une $\mathbf{Z}^I$-graduation naturelle définie comme suit : si l'on note $(\delta_i \mid i \in I)$ la base canonique de $\mathbf{Z}^I$, $\mathfrak{h}$, e_i et f_i sont homogènes de degrés 0, δ_i et $-\delta_i$ respectivement. Les *racines* sont les degrés non nuls représentés par des éléments non nuls de $L(\mathcal{R})$. Lorsque les α_i sont linéairement indépendants, ce qui revient à dire que l'espace $\tilde{\mathfrak{n}}'$ de 1.3 est réduit à 0, $\mathbf{Z}^I$ peut être identifié à $\sum_i \mathbf{Z}\alpha_i$ et les racines peuvent être définies comme au n° 3.3 de [RC 80-81] (où la condition d'indépendance linéaire des α_i a été omise par erreur).

1.6. On dit que la matrice de Cartan généralisée A est *symétrisable* (resp. « *définie* » ; resp. « *semi-définie* ») s'il existe une matrice diagonale

(1) V. Kac et R.V. Moody m'ont informé récemment que cette proposition leur était connue. La démonstration qu'en donne V. Kac est différente de celle qui a été proposée dans le cours ; toutes deux sont courtes.

inversible D telle que la matrice DA soit symétrique (resp. symétrique définie positive ; resp. symétrique semi-définie).

2. *Le théorème de Gabber-Kac*

Si J et K sont des parties de I, on note $A_{J,K}$ la matrice $(\alpha_j(h_i) \mid i \in J, j \in K)$. Soient J une partie de I et $\mathfrak{h}_1$ un sous-espace de $\mathfrak{h}$ contenant les h_j pour $j \in J$ et orthogonal aux α_k pour $k \notin J$. Posons $\mathscr{R}_1 = (\mathfrak{h}_1, (h_j, \alpha_j \mid j \in J))$. Alors, $L(\mathscr{R}_1)$ est, de façon évidente, un idéal gradué de $L(\mathscr{R})$. Dans l'énoncé suivant, $X_{\mathbf{C}}$ signifie $X \otimes \mathbf{C}$.

THÉORÈME. — *Si la matrice A est symétrisable, tout idéal gradué de $L(\mathscr{R})_{\mathbf{C}}$ est de la forme $L(\mathscr{R}_1)_{\mathbf{C}}$, pour $\mathscr{R}_1$ comme ci-dessus. Pour que $L(\mathscr{R})_{\mathbf{C}}$ possède un idéal non gradué, il faut et il suffit qu'il existe une partie J de I telle que $A_{J,I-J} = 0$ et que $A_{J,J}$ soit « semi-définie » et non « définie ».*

La première assertion est due à O. Gabber et V. Kac (*Bull. A.M.S.*, 5, 1981, 185-189), dont on a repris la démonstration, à quelques détails près ; la deuxième est un résultat plus ancien (et plus facile) de V. Kac.

3. *Le cas « semi-défini »*

3.1. Dès son premier article sur les algèbres dont il est question ici (*Izv. Akad. Nauk, Ser. Mat.*, 32, 1968, 1323-1367), V. Kac a donné une description « concrète » des algèbres $L(\mathscr{R})$ associées à une matrice A « semi-définie ». Dans l'article cité, beaucoup de vérifications sont laissées au lecteur, mais si l'on accepte d'utiliser le théorème (moins élémentaire, il est vrai) de Gabber-Kac, il est possible, ainsi qu'on l'a vu dans le cours, de donner une preuve complète et rapide de ce résultat. Commençons par en rappeler l'énoncé, sous une forme adaptée à nos besoins.

3.2. Soient $\bar{\mathfrak{g}}$ une $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie simple déployée, $\bar{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan, $\bar{\Phi}$ le système des racines de $\bar{\mathfrak{g}}$ par rapport à $\bar{\mathfrak{h}}$, $(\bar{\alpha}_j \mid j \in \bar{I})$ une base de $\bar{\Phi}$, $\bar{h}_j$ la coracine correspondant à $\bar{\alpha}_j$, $\bar{e}_j$ et $\bar{f}_j$ $(\in \bar{\mathfrak{g}})$ des vecteurs propres de ad $\bar{\mathfrak{h}}$ de poids $\bar{\alpha}_j$ et $-\bar{\alpha}_j$, tels que $[\bar{e}_j, \bar{f}_j] = \bar{h}_j$, a un entier qui soit l'ordre d'un automorphisme du graphe de Dynkin de $\bar{\mathfrak{g}}$ (donc $a = 1$, 2 ou 3 et, dans le dernier cas, $\bar{\mathfrak{g}}$ est de type D_4), ζ une racine primitive a-ième de l'unité et K l'algèbre $\mathbf{Q}[\zeta, T, T^{-1}]$, où T désigne une indéterminée. Faisons opérer le groupe symétrique $\Gamma = \mathfrak{S}_a$ fidèlement sur $\bar{\mathfrak{g}}$ et sur K de façon qu'il stabilise d'une part $\mathfrak{h}$ et l'ensemble des $\bar{e}_j$, et de l'autre l'ensemble $\{\zeta^t . T \mid 0 \leqslant t \leqslant a - 1\}$. Soient L l'algèbre des points fixes de Γ dans $\bar{\mathfrak{g}} \otimes K$ pour la combinaison de ces deux opérations, $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}} \cap L$ l'espace des points fixes de Γ dans $\bar{\mathfrak{h}}$ (identifié à $\bar{\mathfrak{h}} \otimes 1$), Φ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ restrictions des éléments de $\bar{\Phi}$ et $\varrho : \bar{\Phi} \to \Phi$ l'application de restriction. Le groupe Γ opère sur l'ensemble d'indices $\bar{I}$ de façon évidente ; désignons par I_1 l'ensemble des orbites de cette action et, à nouveau, par ϱ l'application canonique $\bar{I} \to I_1$. Pour $j \in \bar{I}$, l'élément $\varrho(\bar{\alpha}_j)$ de Φ ne dépend que de $i = \varrho(j)$; notons-le α_i. L'ensemble Φ est un système de racines (non nécessairement réduit) dont $(\alpha_i \mid i \in I_1)$ est une base. Pour $i \in I_1$, les racines constituant l'orbite $\varrho^{-1}(\alpha_i)$ sont deux à deux orthogonales, ou bien elles sont au nombre de deux et forment entre elles un angle de 120° ; selon le cas, nous posons $c_i = 1$ ou 2. Soit h_i la moyenne arithmétique des $\bar{h}_j$, pour $j \in \varrho^{-1}(i)$, multipliée par c_i. Notons α_0 :

l'opposée de la racine dominante de Φ si $a = 1$ ou si Φ n'est pas réduit ;

l'opposée de la « racine courte dominante » dans les autres cas.

Il est facile de voir que $\varrho^{-1}(\alpha_0)$ se compose d'une seule racine $\bar{\alpha}_0$. Soient h_0 la coracine correspondante et $\bar{e}_0$, $\bar{f}_0$ des vecteurs propres de ad $\bar{\mathfrak{h}}$ de poids α_0 et $-\bar{\alpha}_0$, tels que $[\bar{e}_0, \bar{f}_0] = h_0$. Posons enfin $I = I_1 \cup \{0\}$, $\mathscr{R} = (\mathfrak{h}, (h_i, \alpha_i \mid i \in I))$, $e_0 = \bar{e}_0 \otimes T$, $f_0 = \bar{f}_0 \otimes T^{-1}$ et, pour $i \in I_1$, $e_i = \Sigma\, \bar{e}_j$ et $f_i = c_i \cdot \Sigma\, \bar{f}_j$, où j parcourt $\varrho^{-1}(i)$.

Proposition. — (i) *La matrice $A = (\alpha_j(h_i))$ est une matrice de Cartan généralisée, « semi-définie » et indécomposable (i.e., pour $J \subset I$, la relation $A_{J,I-J} = 0$ implique $J = \emptyset$ ou $J = I$) ; réciproquement, toute matrice de Cartan généralisée, « semi-définie » et indécomposable s'obtient ainsi, pour un seul choix de $\bar{\mathfrak{g}}$ et a.*

(ii) *Les éléments e_i et f_i, pour i parcourant I, engendrent l'algèbre de Lie L et satisfont aux relations de définition de $L(\mathscr{R})$. L'homomorphisme $L(\mathscr{R}) \to L$ qui en résulte est un isomorphisme.*

3.3. La preuve de (i) est facile : on peut utiliser la classification ou préférer un raisonnement plus conceptuel, à la Steinberg. Pour établir (ii), on dote $\bar{\mathfrak{g}} \otimes K$ d'une graduation à valeurs dans les fonctions affines sur $\mathfrak{h}$: si $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ est un vecteur propre pour ad $\mathfrak{h}$ de valeur propre α, on attribue à $x \otimes T^z$ le degré $\alpha + z$. (Les degrés non nuls d'éléments homogènes non nuls de L sont les *racines affines*.) Pour montrer la nullité de $[e_i, f_j]$, pour $i \neq j$, et de $(\mathrm{ad}\, e_i)^{-A(i,j)+1}(e_j)$ et $(\mathrm{ad}\, f_i)^{-A(i,j)+1}(f_j)$, pour $i \neq j$ et $A(i, j) = \alpha_j(h_i)$, il sufit de constater que les degrés de ces expressions ne sont pas représentés dans L ; la vérification des autres relations de définition de $L(\mathscr{R})$ est un calcul immédiat. Enfin, la deuxième assertion de (ii) résulte aussitôt du théorème de Gabber-Kac, après identification des groupes de valeurs des graduations de L et $L(\mathscr{R})$.

3.4. Si l'on part de la même matrice A que ci-dessus, mais que l'on prend cette fois pour $\mathscr{R}$ le système $(\bigoplus_i \mathbf{Q}h_i, (h_i, \alpha'_i \mid i \in I))$, où les éléments α'_i du dual de $\bigoplus_i \mathbf{Q}h_i$ sont définis par $(\alpha'_j(h_i)) = A$, alors il résulte de la proposition du n° 1.4 que $L(\mathscr{R})$ est l'extension centrale universelle de L, et que son centre est de dimension un. C'est le résultat de H. Garland et R.L. Wilson mentionné en 1.4.

GROUPES

4. *Position du problème*

On se donne à présent dans $\mathfrak{h}'$ un réseau Λ contenant les α_i et dont le $\mathbf{Z}$-dual Λ' contient les h_i. Lorsque la matrice $A = (\alpha_j(h_i))$ est « définie », la théorie de Chevalley-Demazure associe au système $(\Lambda, (h_i, \alpha_i))$ un schéma en groupes réductif, le *schéma de Chevalley* correspondant à cette donnée, que l'on peut interpréter comme un foncteur de la catégorie des anneaux dans celle des groupes.

L'un des buts poursuivis dans le cours a été, en gros, d'étendre ce résultat à une matrice A quelconque (à cela près que, dans le cas général, il s'avère plus naturel de considérer des foncteurs à valeurs dans la catégorie des groupes *topologiques,* la topologie étant discrète lorsque A est « définie »). Ce programme n'a cependant été réalisé de façon satisfaisante que sur les *anneaux principaux,* restriction nécessitée par le mode de construction employé. A vrai dire, ce mode de construction — par générateurs et relations — s'applique à des anneaux intègres quelconques, mais il ne conduit pas, en général, aux « bons » groupes (cf. 5.4).

La construction, dont les grandes lignes seront rappelées ci-dessous, implique le choix dans l'algèbre enveloppante de $L(\mathscr{R})$ d'un ordre gradué $U_{\mathbf{Z}}$ contenant les puissances réduites $e_i^m/m!$, $f_i^m/m!$ et les « coefficients binomiaux » $\binom{\lambda'}{m}$ pour $m \geqslant 1$ et $\lambda' \in \Lambda'$. Dans le cours de l'année précédente, où cette même construction avait déjà été donnée pour les corps, on avait pris pour $U_{\mathbf{Z}}$ l'ordre *engendré* par les éléments en question (cf. [RC 80-81], n° 1.3), mais il n'est pas évident que ce choix s'impose, et l'on n'a plus fait cette hypothèse ici. Cette question mériterait sans doute d'être approfondie.

Posons $\mathscr{R}_{\mathbf{Z}} = (\Lambda, (h_i, \alpha_i \mid i \in I), U_{\mathbf{Z}})$. Tous les foncteurs $\mathscr{U}$, $\mathscr{G}$, $\hat{\mathscr{G}}$, etc., que nous aurons à considérer dépendent de cette donnée $\mathscr{R}_{\mathbf{Z}}$, qui ne sera généralement pas explicitée dans la notation.

5. *Les foncteurs $\mathscr{G}$ et $\hat{\mathscr{G}}$*

5.1. Introduisons d'abord quelques notations. Soient L_+ la sous-algèbre de $L(\mathscr{R})$ engendrée par les e_i, $U_{\mathbf{Z},+}$ l'intersection de $U_{\mathbf{Z}}$ avec l'algèbre enveloppante de L_+ et $L_{\mathbf{Z},+}$ l'anneau de Lie $L_+ \cap U_{\mathbf{Z}}$. Pour tout anneau R, posons $U_R = U_{\mathbf{Z}} \otimes R$, $U_{R,+} = U_{\mathbf{Z},+} \otimes R$, $L_{R,+} = L_{\mathbf{Z},+} \otimes R$ et $\mathscr{C}(R) = \mathrm{Hom}\,(\Lambda, R^\times)$, et notons $\hat{U}_{R,+}$ le complété de $U_{R,+}$ pour la filtration par le degré total. Pour $i \in I$, l'automorphisme exp ad $e_i \cdot$ exp ad $(-f_i)$ exp ad e_i de $U_{\mathbf{Q}}$ laisse invariant $U_{\mathbf{Z}}$ et induit donc, pour tout R, un automorphisme de U_R que (conformément aux conventions de [RC 80-81]), nous désignons par $\bar{r}_i$. Notons $U_{R,+,i}$ l'intersection $U_{R,+} \cap \bar{r}_i(U_{R,+})$ et $\hat{U}_{R,+,i}$ son adhérence dans $\hat{U}_{R,+}$. Il est facile de voir que $\bar{r}_i$ stabilise $U_{R,+,i}$ et transforme sa filtration par le degré total en une filtration cofinale à celle-ci, donc $\bar{r}_i$ se prolonge en un automorphisme de $\hat{U}_{R,+,i}$, que nous notons également $\bar{r}_i$. Le groupe $\mathscr{C}(R)$ opère sur les algèbres U_R, $\hat{U}_{R,+}$, $\hat{U}_{R,+,i}$ par le truchement de la graduation.

On montre qu'il existe un plus petit sous-groupe X du groupe multiplicatif de $\hat{U}_{R,+}$ contenant exp te_i pour tous $t \in R$ et $i \in I$ (l'exponentielle a un sens vu les hypothèses faites sur $U_{\mathbf{Z}}$), et tel que $X \cap \hat{U}_{R,+,i}$ soit stable par $\bar{r}_i$ pour tout i. Ce groupe est évidemment stable par $\mathscr{C}(R)$. Nous le notons $\mathscr{U}(R)$ (1) et nous désignons par $\hat{\mathscr{U}}(R)$ son adhérence dans $\hat{U}_{R,+}$. Si R est un corps de caractéristique zéro, $\hat{\mathscr{U}}(R)$ n'est autre que l'adhérence de exp $L_{R,+}$ dans $\hat{U}_{R,+}$.

5.2. Soit K un corps. On a montré dans le cours précédent comment, à partir d'un sous-groupe X du groupe multiplicatif de $\hat{U}_{K,+}$ satisfaisant à certaines conditions, on peut définir par générateurs et relations un certain groupe G doté d'une BN-paire (cf. [RC 80-81], § 3, et notamment le théorème 1). Ce groupe G possède une structure naturelle de groupe topologique que l'on peut caractériser ainsi : le groupe X, doté de la topologie induite par celle de $\hat{U}_{R,+}$, est un sous-groupe ouvert de G.

Nous notons $\mathscr{G}(K)$ (resp. $\hat{\mathscr{G}}(K)$) le groupe topologique G obtenu en faisant $X = \mathscr{U}(K)$ (resp. $\hat{\mathscr{U}}(K)$). (D'autres choix sont possibles pour X, mais nous ne nous y arrêterons pas ici.) Dans la suite de ce résumé, nous n'aurons pas besoin de la définition explicite des groupes G en question (on la trouvera d'ailleurs dans [RC 80-81]), mais seulement de quelques propriétés que nous rappelons à présent.

---

(1) Lorsque R est un corps, c'est le groupe $X^{\min}$ de [RC 80-81], n° 3.6. La description qui en est donnée là comme « groupe engendré par les Y_α correspondant aux racines α principales positives » est une simplification abusive d'une construction qui avait été donnée dans le cours ; j'ignore si elle est correcte.

Le groupe $\mathcal{G}(K)$ contient comme sous-groupe ouvert le groupe $\mathcal{B}(K)$, produit semi-direct de $\mathcal{T}(K)$ par $\mathcal{U}(K)$. De même, $\hat{\mathcal{B}}(K) = \mathcal{T}(K) \ltimes \hat{\mathcal{U}}(K) \subset \hat{\mathcal{G}}(K)$.

Pour $i \in I$, il existe un homomorphisme $\sigma_{i,K}$ de $\mathbf{SL}_2(K)$ dans $\mathcal{G}(K)$ (donc aussi dans $\hat{\mathcal{G}}(K)$) possédant les propriétés suivantes : on a $\sigma_{i,K}\left(\begin{smallmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = \exp te_i$; l'image m_i de la matrice $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ par $\sigma_{i,K}$ normalise les sous-groupes $\mathcal{T}(K)$ et $\mathcal{U}(K) \cap \hat{U}_{K,+,i}$, et les automorphismes de ces sous-groupes induits par la conjugaison par m_i sont respectivement l'adjoint de la réflexion $r_i : \lambda \mapsto \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ de Λ et la restriction de $\bar{r}_i$.

Soit $\mathcal{N}(K)$ le sous-groupe de $\mathcal{G}(K)$ engendré par $\mathcal{T}(K)$ et les m_i et soient W le groupe quotient $\mathcal{N}(K)/\mathcal{T}(K)$ et s_i l'image de m_i dans W. Alors, $(W, (s_i \mid i \in I))$ est un système de Coxeter, et l'ordre de s_is_j dans W pour $i,j \in I$ et $i \neq j$ est 2, 3, 4, 6 ou ∞ selon que $\alpha_i(h_j) \cdot \alpha_j(h_i) = 0$, 1, 2, 3 ou $\geqslant 4$.

Les sous-groupes $\mathcal{B}(K)$ (resp. $\hat{\mathcal{B}}(K)$) et $\mathcal{N}(K)$ forment dans $\mathcal{G}(K)$ (resp. $\hat{\mathcal{G}}(K)$) une BN-paire de groupe de Weyl W.

5.3. Soit à présent R un anneau principal dont K est le corps des quotients. Notons $\sigma_{i,R}$ la restriction de $\sigma_{i,K}$ à $\mathbf{SL}_2(R)$ et $\mathcal{S}_i(R)$ l'image $\sigma_{i,R}(\mathbf{SL}_2(R))$ de $\sigma_{i,R}$. Nous définissons alors $\mathcal{G}(R)$ (resp. $\hat{\mathcal{G}}(R)$) comme le sous-groupe de $\hat{\mathcal{G}}(K)$ engendré par les $\mathcal{S}_i(R)$ et $\mathcal{T}(R)$ (resp. par les $\mathcal{S}_i(R)$, $\mathcal{T}(R)$ et $\hat{\mathcal{U}}(R)$). On a $\mathcal{G}(R) \cap \hat{\mathcal{U}}(K) = \mathcal{U}(R)$.

Ce choix de la définition des foncteurs $\mathcal{G}$ et $\hat{\mathcal{G}}$ pour des anneaux R *principaux* est motivé par l'observation suivante qui s'inspire d'une remarque de R. Steinberg (Lectures on Chevalley groups, Yale University, 1967, p. 99) :

Tout sous-groupe G de $\hat{\mathcal{G}}(K)$ contenant $\mathcal{S}_i(R)$ pour tout i est engendré par les $\mathcal{S}_i(R)$ et $G \cap \hat{\mathcal{B}}(K)$.

Plus précisément, si $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ est un élément quelconque du groupe de Weyl exprimé sous forme de mot réduit en les s_i, on a :

$$G \cap (\hat{\mathcal{B}}(K) \cdot w \cdot \hat{\mathcal{B}}(K)) = \mathcal{S}_{i_1}(R) \dots \mathcal{S}_{i_l}(R) \cdot (G \cap \hat{\mathcal{B}}(K)). \tag{1}$$

La preuve, par induction sur l, est immédiate, compte tenu du fait que, l'anneau R étant principal, $\mathbf{SL}_2(R)$ est transitif sur la droite projective $\mathbf{P}_1(K)$.

5.4. L'an dernier, on avait défini la notion de U_R-module *intégrable* sous l'hypothèse que R est un corps (cf. [RC 80-81], n° 2.1), mais la définition s'étend de façon évidente à un anneau R quelconque, et l'on montre que, si R est principal, tout tel module est aussi, « par intégration », un $\mathscr{G}(R)$-module. Si, de plus, il s'agit d'un module à poids dominant, sa structure de $\mathscr{G}(R)$-module se prolonge par continuité à $\hat{\mathscr{G}}(R)$ (1).

5.5. Signalons encore, sans entrer dans le détail, deux autres questions abordées dans cette partie du cours.

Le théorème de présentation des groupes avec BN-paires (cf. la note « Définition par générateurs et relations... » mentionnée dans la liste de publications faisant suite à ce résumé) utilisé pour établir l'existence des groupes $\mathscr{G}(K)$ et $\hat{\mathscr{G}}(K)$ a aussi été illustré par une application à la théorie des groupes finis, à savoir, une nouvelle preuve d'existence d'une extension centrale essentielle de $\mathbf{SL}_3(\mathbf{F}_4)$ par $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^2$.

D'autre part, on a exposé, en y apportant quelques compléments, des résultats récents de R.V. Moody sur la simplicité topologique du groupe $\hat{\mathscr{G}}(K)$ (sous certaines conditions).

6. *Le symétrie* $e_i \leftrightarrow f_i$. *Une* BN-*paire « mixte »*

6.1. Posons $\mathscr{R}^* = (\mathfrak{h}, (-h_i, -\alpha_i \mid i \in I))$ et notons $(\mathfrak{h}, e^*_i, f^*_i)$ le système générateur « canonique » de l'algèbre de Lie $L(\mathscr{R}^*)$. Identifions cette dernière à $L(\mathscr{R})$ par l'isomorphisme qui envoie e_i sur f^*_i et f_i sur e^*_i, et qui induit sur $\mathfrak{h}$ la multiplication par -1. De la sorte, $U_{\mathbf{Z}}$ devient aussi un ordre dans l'algèbre enveloppante de $L(\mathscr{R}^*)$. Notons $\mathscr{G}^*$, $\mathscr{B}^*$, $\sigma^*_{i,R}$ les analogues de $\mathscr{G}$, $\mathscr{B}$, $\sigma_{i,R}$ définis à partir de la donnée $(\Lambda, (-h_i, -\alpha_i \mid i \in I), U_{\mathbf{Z}})$ au lieu de la donnée $\mathscr{R}_{\mathbf{Z}}$.

PROPOSITION. — *Il existe un isomorphisme de foncteurs* $\iota : \mathscr{G}^* \to \mathscr{G}$ *dont la restriction à* $\mathscr{C}$ *est le passage à l'inverse et tel que, pour tout* R *et tout élément* x *de* $\mathbf{SL}_2(R)$, *on ait* $\iota(\sigma^*_{i,R}(x)) = \sigma_{i,R}({}^t x^{-1})$.

Pour établir ce résultat, on a dû faire appel à la théorie de Kac des représentations linéaires à poids dominants (et utiliser l'intégrabilité de telles représentations : cf. 5.4). Il serait certes souhaitable d'en donner une démonstration plus directe, mais cela paraît moins aisé qu'on pourrait s'y attendre.

6.2. *Exemple.* Soit K un corps, et plaçons-nous dans la situation du § 3 (cas d'une matrice A « semi-définie » et indécomposable : cf. la proposition

(1) L'énoncé du théorème 2 de [RC 80-81], n° 3.5, est manifestement incorrect ; il faut y remplacer U_K par (U_K, X), en définissant un (U_K, X)-module de façon évidente.

du n° 3.2). On verra plus loin que, pour un choix convenable du réseau Λ, il existe alors un schéma en groupes $\mathscr{H}$ défini sur $\mathbf{Z}[T^a,T^{-a}]$ (où a est l'entier du n° 3.2) tel que $\mathscr{G}(K)$ et $\mathscr{G}^*(K)$ soient tous deux canoniquement isomorphes à $\mathscr{H}(K[T^a,T^{-a}])$. Dans ce cas, la « symétrie » ι est l'automorphisme de ce groupe induit par le K-automorphisme de $K[T^a,T^{-a}]$ permutant T et T^{-1}.

6.3. Soient K un corps, G un sous groupe de $\hat{\mathscr{G}}(K)$ contenant $\mathscr{G}(K)$, B l'intersection de G avec $\hat{\mathscr{B}}(K)$ et B^- l'image de $\mathscr{B}^*(K)$ par ι. Notons que G contient le groupe $\mathscr{N}(K)$, ce qui donne un sens à des expressions telles que B^-wB pour $w \in W$. On a alors, pour $i \in I$ et $w \in W$, et désignant comme toujours par $l(x)$ la longueur de $x \in W$ par rapport au système générateur $\{s_j \mid j \in I\}$,

$$(1) \qquad B^-wBs_iB = \begin{cases} B^-ws_iB & \text{si} \quad l(ws_i) < l(w), \\ B^-wB \cup Bws_iB & \text{si} \quad l(ws_i) > l(w), \end{cases}$$

d'où l'on déduit, de la manière habituelle, la « décomposition de Bruhat » :

(2) *l'application* $w \longrightarrow B^-wB$ *est une bijection de* W *dans* $B^-\backslash G/B$.

Ajoutons que $B^- \cap B = \mathscr{T}(K)$.

Lorsque le groupe de Weyl W est fini (c'est-à-dire lorsque A est « définie »), le sous-groupe B^- est conjugué à B dans G et les relations (1) et (2) sont équivalentes aux relations analogues (axiome des BN-paires et décomposition de Bruhat) pour les doubles classes BwB. Il n'en est plus de même lorsque W est infini. Dans ce cas, les décompositions $G = BNB$ et $G = B^-NB$ sont essentiellement différentes ; ainsi, les BwB/B sont des espaces affines de dimension finie (voir plus loin le n° 8.3) tandis que les B^-wB/B sont — en un certain sens — de codimension finie dans G/B.

L'intérêt de la décomposition (2) m'a été signalé par J. Bernstein et V. Kac. P. Slodowy m'a fait remarquer que, dans le cas particulier des groupes de type $\tilde{\mathrm{A}}_n$ (diagramme A_n étendu), cette décomposition a pour conséquence immédiate un résultat bien connu de A. Grothendieck donnant la classification des fibrés vectoriels de base une droite projective. La recherche de formules explicites reliant la loi de groupe de G, la décomposition $G = BNB$ et la décomposition $G = B^-NB$ (et, plus particulièrement, la décomposition en deux facteurs dans la « grande cellule » B^-B) semble être un problème intéressant et profond, susceptible d'applications importantes, comme l'indiquent notamment des calculs effectués par A.G. Reyman et M.A. Semenov-Tian-Shansky dans le cas de $\tilde{\mathrm{A}}_n$. La difficulté évoquée à la fin du n° 6.1 est sans doute liée à ce problème.

7. *Le cas « semi-défini » (suite)*

7.1. On s'est proposé de donner, dans le cas en question, une description élémentaire des foncteurs $\mathcal{G}$ et $\hat{\mathcal{G}}$, analogue à celle de Kac pour les algèbres de Lie (cf. le § 3). De façon inattendue, le résultat a pu être obtenu sans que l'on ait à spécifier le choix de l'ordre $U_{\mathbf{Z}}$, ce dernier ne jouant qu'un rôle implicite dans les raisonnements. En particulier, il apparaît que, dans le cas « semi-défini », les foncteurs $\mathcal{G}$ et $\hat{\mathcal{G}}$ sont indépendants de $U_{\mathbf{Z}}$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, K désigne un corps et R, R' des anneaux principaux. Nous reprenons les notations — et en particulier le système $\mathcal{R}$ — du § 3, et nous choisissons pour Λ le réseau engendré (dans $\mathfrak{h}$) par les h_i.

7.2. Supposons d'abord a égal à 1, et soit $\mathcal{H}$ le schéma de Chevalley quasi-simple simplement connexe correspondant à l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{g}}$, c'est-à-dire au système $(\Lambda, (\bar{h}_j, \bar{\alpha}_j \mid j \in \bar{I}))$. Dans ce cas, H. Garland (*loc. cit.* n° 1.4) a montré que $\hat{\mathcal{G}}(K)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{H}(K((T)))$. Pour a quelconque, les résultats du § 3 suggèrent qu'il faut remplacer le schéma $\mathcal{H}$ déployé par un schéma quasi-déployé défini sur $K((T^a))$, se déployant sur $K(\zeta)((T))$ et correspondant au groupe d'automorphismes Γ. Cependant, cette description ne peut évidemment être correcte que si a est inversible dans K, sans quoi l'extension $K(\zeta)((T))/K((T^a))$ n'est pas séparable. De ce fait, le cas d'un corps de caractéristique a ou, plus généralement, d'un anneau principal quelconque, a une saveur particulière.

7.3. La proposition suivante donne la forme générale du résultat.

PROPOSITION. — *Il existe un schéma en groupes lisse $\mathcal{H}$ sur $\mathbf{Z}[T^a, T^{-a}]$ tel que, pour tout anneau principal R, on ait $\hat{\mathcal{G}}(R) = \mathcal{H}(R((T^a)))$.*

En outre, $\mathcal{G}(R)$ est alors un sous-groupe de $\mathcal{H}(R[T^a, T^{-a}])$, et lui est égal si R est un corps.

7.4. *Exemples*

(i) Si $a = 1$, $\mathcal{H}$ est le schéma de Chevalley considéré plus haut.

(ii) Supposons que $\bar{\mathfrak{g}}$ soit de type A_{2n} et que $a = 2$. C'est donc le cas où l'on s'attend à trouver pour $\hat{\mathcal{G}}(R)$ un groupe unitaire à un nombre impair de variables. Soit V le $\mathbf{Z}[T^2, T^{-2}]$-module libre $(\mathbf{Z}[T^2, T^{-2}])^{4n+2}$ dans lequel nous introduisons des coordonnées x_i, y_i $(i = -n, ..., n)$, et soient $q : V \to \mathbf{Z}[T^2, T^{-2}]$ la forme quadratique :

$$(x_i, y_i) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (x_{-i}x_i - T^2 y_{-i}y_i),$$

s la forme bilinéaire symétrique associée à q et $f : V \times V \rightarrow \mathbf{Z}[T^2, T^{-2}]$ la forme alternée :

$$((x_i, y_i), (x'_i, y'_i)) \mapsto \sum_{i=0}^{n} (x_{-i}y'_i - y_i x'_{-i} - y_{-i}x'_i + x_i y'_{-i}).$$

Nous pouvons faire de V un $\mathbf{Z}[T, T^{-1}]$-module libre de range $2n+1$ en y définissant la multiplication par T comme ceci : $T \cdot (x_i, y_i) = (T^2 y_i, x_i)$. Cela étant, nous notons $\mathscr{SL}_T(V)$ le sous-schéma en groupes du schéma $\mathscr{GL}(V)$ des automorphismes de V dont le groupe des points à valeurs dans une $\mathbf{Z}[T^2, T^{-2}]$-algèbre Y est le groupe des automorphismes de déterminant un de $V \otimes Y$ *considéré comme* $Y(T)$-*module* (on définit $Y(T)$ et la structure de $Y(T)$-module de façon évidente, vu ce qui précède). Finalement, le schéma $\mathscr{H}$ de la proposition peut être décrit, dans le cas présent, comme le stabilisateur du couple (q, f) dans le schéma en groupes $\mathscr{SL}_T(V)$. Remarquons que si l'on se borne à considérer des anneaux de coefficients dans lesquels 2 est inversible, ce qui revient à remplacer dans ce qui précède V par $V[\frac{1}{2}] = V \otimes \mathbf{Z}(\frac{1}{2})[T^2, T^{-2}]$, alors le stabilisateur de (q, f) s'identifie avec le stabilisateur de $s + Tf$ qui est une forme hermitienne sur $V[\frac{1}{2}]$ considéré comme $\mathbf{Z}(\frac{1}{2})[T, T^{-1}]$-module ; ainsi, $\mathscr{H}$ devient bien alors un schéma en groupes unitaires, comme il était prévu.

7.5. Notre démonstration de la proposition du n° 7.3 a quelque ressemblance avec celle donnée par H. Garland (*loc. cit.*) dans le cas particulier où $a = 1$, mais elle en diffère sur un point essentiel : le fait, déjà mentionné, qu'elle évite l'intervention explicite de l'ordre $U_{\mathbf{Z}}$ (qui entraînerait de sérieuses complications lorsque $a > 1$). Dans le cours, cette démonstration n'a été donnée en détail que pour les exemples du n° 7.4, mais le principe en est général. On peut distinguer trois étapes.

(I) On construit explicitement un schéma $\mathscr{H}$ et des homomorphismes $\sigma'_{i,R} : \mathbf{SL}_2(R) \rightarrow \mathscr{H}(R((T^a)))$ et $\eta'_R : \mathscr{C}(R) \rightarrow \mathscr{H}(R((T^a)))$ (qui deviendront respectivement les homomorphismes $\sigma_{i,R}$ du n° 5.3 et l'injection canonique η_R de $\mathscr{C}(R)$ dans $\hat{\mathscr{G}}(R)$), fonctoriels en R. Cela se fait cas par cas. Posons $\mathscr{G}'(R) = \mathscr{H}(R((T^a)))$.

(II) On établit les propriétés suivantes :

(i) *Les images des* $\sigma'_{i,R}$ *et de* η'_R *engendrent* $\mathscr{G}'(R)$ *topologiquement.*

(ii) *A toute injection d'anneaux principaux* $R' \rightarrow R$ *correspond une immersion fermée du groupe* $\mathscr{G}'(R')$ *dans le groupe* $\mathscr{G}'(R)$.

(iii) *Si* K *est un corps algébriquement clos, il existe un anneau de valuation* R *de caractéristique zéro et de corps résiduel* K *tel que le noyau de la réduction* $\mathscr{G}'(R) \rightarrow \mathscr{G}'(K)$ *soit engendré par ses intersections avec les images de* η'_R *et des* $\sigma'_{i,R}$. *L'homomorphisme de réduction est un morphisme de passage au quotient.*

(iv) *Pour K comme ci-dessus, tout sous-groupe propre distingué de $\mathcal{G}'(K)$ est contenu dans l'image de l'homomorphisme η'_K, qui est injectif.*

La preuve de (ii) et (iv) est facile, (i) se démontre à l'aide d'une relation analogue à 5.3 (1), et (iii) s'établit en utilisant une présentation à la Steinberg de $\mathcal{G}'(K) = \mathcal{H}(K((T^a)))$.

On observe d'autre part que, en vertu de la définition même de $\hat{\mathcal{G}}$,

(i′) *$\hat{\mathcal{G}}(R)$ est topologiquement engendré par les images de η_R et des $\sigma_{i,R}$;*

(ii′) *l'assertion* (ii) *est vraie si l'on y remplace $\mathcal{G}'$ par $\hat{\mathcal{G}}$;*

(iii′) *si $R \to K$ est un épimorphisme d'un anneau sur un corps appliquant $R^\times$ sur $K^\times$, l'homomorphisme $\hat{\mathcal{G}}(R) \to \hat{\mathcal{G}}(K)$ correspondant est un morphisme de passage au quotient ;*

(iv′) *η_R est injectif pour tout R.*

(III) Il s'agit enfin de montrer que les systèmes de foncteurs $(\hat{\mathcal{G}}, (\sigma_i \mid i \in I), \eta)$ et $(\mathcal{G}', (\sigma'_i \mid i \in I), \eta')$ sont isomorphes. On commence par le vérifier sur $\mathbf{C}$, ce qui est facile car on dispose dans ce cas du résultat correspondant pour les algèbres de Lie. Utilisant (i), (i′), (ii) et (ii′), on en déduit le résultat pour tout anneau principal de caractéristique zéro puis, par (iii), (iii′), (iv) et (iv′), pour tout corps algébriquement clos et enfin, à nouveau par (i), (i′), (ii) et (ii′), pour tout anneau principal.

7.6. *Remarques.* a) L'assertion (ii) a un intérêt propre ; elle n'est pas évidente, même lorsque $\mathcal{H}$ est le schéma $\mathbf{SL}_n$.

b) La preuve que nous venons d'esquisser montre que, dans le cas « semi-défini », les propriétés (i′) à (iv′) constituent une caractérisation axiomatique du système de foncteurs $(\hat{\mathcal{G}}, (\sigma_i \mid i \in I), \eta)$, une fois donnés le groupe $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{C})$ et les homomorphismes $\sigma_{i,\mathbf{C}}$ et $\eta_{\mathbf{C}}$. Cette remarque vaut également pour une matrice A « définie » et peut donc servir de définition aux groupes de Chevalley ; en particulier, elle fournit une preuve simple de l'isomorphisme des groupes de Chevalley des types classiques avec les groupes classiques correspondants.

c) Quel que soit le système $\mathcal{R}_\mathbf{Z}$, il peut être intéressant d'étudier la catégorie (indépendante de $U_\mathbf{Z}$) des systèmes de foncteurs satisfaisant aux conditions (i′) à (iv′) et coïncidant avec $(\hat{\mathcal{G}}, (\sigma_i \mid i \in I), \eta)$ sur $\mathbf{C}$.

d) Ici, comme au § 3, on a éliminé par le choix de $\mathfrak{h}$ ou, si l'on préfère, de Λ, le problème de l'extension centrale. Si l'on prend pour Λ la somme directe des $\mathbf{Z}h_i$, on obtient pour $\hat{\mathcal{G}}(R)$ une extension centrale par $R^\times$ du groupe décrit plus haut. Dans le cours, on a indiqué une méthode (valable d'ailleurs pour des matrices A dégénérées quelconques) permettant de calculer un cocycle décrivant l'extension, mais on n'a pas essayé de retrouver par ce procédé les résultats connus de C. Moore, H. Matsumoto et H. Garland sur la question ; cela devrait être fait.

8. *Variétés de Schubert et de Demazure*

Dans la dernière partie du cours, on a étudié la nature algébro-géométrique des foncteurs $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}/\hat{\mathcal{B}}$. Les principaux résultats obtenus concernent l'espace homogène $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{C})/\hat{\mathcal{B}}(\mathbf{C})$.

8.1. Posons $G = \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{C})$, $B = \hat{\mathcal{B}}(\mathbf{C})$, $N = \mathcal{N}(\mathbf{C})$, $T = \mathcal{T}(\mathbf{C})$, et reprenons les notations W et s_i du n° 5.2 ; on a donc $W = N/T$. Il résulte aussitôt des définitions de G et de B et des propriétés élémentaires des BN-paires que BwB/B a une structure naturelle d'espace affine de dimension $l(w)$. La décomposition de Bruhat fournit donc, comme dans le cas classique, une « décomposition cellulaire » de G/B, c'est-à-dire, une partition de G/B en espaces affines, qu'il s'agit de « recoller ».

On sait que le groupe de Coxeter W est doté d'une relation d'ordre naturelle : $w' \leqslant w$ signifie que si $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ est une décomposition réduite de w, il existe une suite extraite de la suite $(s_{i_1}, \dots, s_{i_l})$ dont le produit est w' ; cette propriété ne dépend pas de la décomposition réduite choisie. Pour $w \in W$, posons $S_w = \bigcup_{w' \leqslant w} Bw'B/B$. Lorsque W est fini, on sait que G/B est une variété projective et que S_w est une sous-variété fermée de G/B, appelée *variété de Schubert*. Il est donc naturel de chercher à doter S_w d'une structure de variété projective dans tous les cas.

Considérons à présent une représentation irréductible de poids dominant λ de l'algèbre de Lie $L(\mathcal{R}) \otimes \mathbf{C}$, et soient P l'espace projectif de l'espace de représentation et v le point de P correspondant à la droite des vecteurs dominants. Supposons λ choisi de telle sorte que $\lambda(h_i) \neq 0$ pour tout i. Le stabilisateur de v dans G est alors B et l'application $g \mapsto gv$ définit une injection φ de G/B dans P.

THÉORÈME. — *L'ensemble $\varphi(S_w)$ est une sous-variété algébrique fermée d'un sous-espace projectif de dimension finie de P. Si la matrice A est symétrisable, la structure de variété projective ainsi obtenue, par transport de structure, sur S_w, est indépendante de λ.*

Il est plus que probable que l'hypothèse faite sur A est superflue.

La première assertion du théorème est conséquence facile de l'existence des « variétés de Demazure », objet de la proposition suivante. La deuxième s'obtient par des manipulations sur les produits tensoriels et les puissances symétriques de représentations.

8.2. Soient w un élément de W et $\mathbf{s} = (s_{i_1}, \ldots s_{i_l})$ un mot réduit tel que $w = s_{i_1} \ldots s_{i_l}$. Notons $D(\mathbf{s})$ l'ensemble des galeries de type $\mathbf{s}$ et d'origine B dans l'immeuble de G, c'est-à-dire l'ensemble des suites $(g_k B \mid k = 0, \ldots, l)$ telles que $g_0 = 1$ et $g_{k-1}^{-1} g_k \in B s_{i_k} B \cup B$ pour tout k. L'application $(g_k B \mid k = 0, \ldots, l) \mapsto g_l B$ est une surjection $\delta : D(\mathbf{s}) \to S_w$ et, dans le cas d'une matrice A « définie », M. Demazure a doté $D(\mathbf{s})$ d'une structure de variété non singulière qui fait de δ une désingularisation de S_w. On se propose de généraliser ce résultat à une matrice A quelconque. La méthode m'a été suggérée par P. Deligne. Pour tout $i \in I$ et tout $t \in \mathbf{C}$, posons $y_i(t) = \sigma_{i,\mathbf{C}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $m_i = \sigma_{i,\mathbf{C}}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (cf. 5.2). Pour toute suite $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l)$, avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1, considérons l'application $\varkappa(\boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbf{C}^l \to D(\mathbf{s})$ qui envoie $(t_1, \ldots, t_l)$ sur la suite $(g_k B \mid k = 0, \ldots, l)$ définie par :

$$g_{k-1}^{-1} g_k = m_i^{\varepsilon} \cdot y_i(t_k) \cdot m_i \qquad (i = i_k, \varepsilon = \varepsilon_k).$$

PROPOSITION. — *Les $\varkappa(\boldsymbol{\varepsilon})$ sont des cartes affines pour une structure de variété algébrique complète séparée sur $D(\mathbf{s})$. L'application « oubli du dernier terme » de $D(\mathbf{s})$ sur $D(s_{i_1}, \ldots, s_{i_{l-1}})$ est une fibration en droites projectives. L'application composée de δ et de φ (cf.* 8.1) *est un morphisme surjectif birationnel de $D(\mathbf{s})$ sur $\varphi(S_w)$.*

8.3. *Remarques.* — a) D'après le théorème du n° 8.1, l'espace homogène G/B est (au moins pour une matrice A symétrisable) une limite inductive de variétés projectives.

b) Il est probable que l'on peut, par une méthode analogue (esquissée dans le cours), doter l'ensemble $G_w = \bigcup_{w' \leqslant w} Bw'B$, image réciproque de S_w dans G, d'une structure de variété proalgébrique affine. Le groupe G serait donc une limite inductive de telles variétés.

c) Dans ce qui précède, $\mathbf{C}$ pourrait, sans difficulté, être remplacé par un corps de caractéristique zéro quelconque. Par contre, le passage à une caractéristique finie, puis à $\mathbf{Z}$, de façon à pouvoir définir le foncteur $\mathcal{G}$ sur un anneau quelconque, pose encore de nombreux problèmes. Notons toutefois que la structure d'espace affine de BwB/B est naturellement définie sur $\mathbf{Z}$.

d) La définition de la structure de variété algébrique de S_w fournie par le théorème du n° 8.1 a l'inconvénient d'utiliser la théorie des représentations linéaires et, surtout, d'introduire un élément parasite, le poids λ. Une méthode plus directe m'a été suggérée par G. Lusztig et semble très prometteuse : elle consiste à utiliser la « grande cellule » de la décomposition (2) du n° 6.3. Le groupe B^- est produit semi-direct de T par le sous-groupe X^- « symétrique de $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ », c'est-à-dire image par l'isomorphisme ι du n° 6.1 du sous-groupe de $\mathscr{G}^*(\mathbf{C})$ analogue à $\mathscr{X}(\mathbf{C})$. Ce groupe X^- est sous-groupe dense (pour une topologie qui n'est pas celle de G) d'un groupe prounipotent. On a $X^- \cap B = \{1\}$, de sorte que l'on peut recouvrir G/B par des cartes, images bijectives de X^-. Ainsi, toute partie de G/B, et en particulier S_w, peut être recouverte par des images de parties de X^- et le problème consiste à étudier la nature algébro-géométrique de ces parties et des applications de recollement.

e) On a déjà vu l'an dernier que si $w = s_i s_j$, la variété S_w est la surface fibrée en droites projectives au-dessus d'une droite projective d'invariant A_{ij} (la convention que nous adoptons ici pour le signe de l'invariant diffère de celle de [RC 80-81], n° 4.2, et est sans doute plus répandue dans la littérature). Ainsi, toute surface fibrée de ce type est une variété S_w tandis que seules les surfaces d'invariants 0, — 1, — 2 et — 3 sont des variétés de Schubert de groupes semi-simples. Cet exemple suggère que les S_w (pour A quelconque) constituent peut-être une famille de variétés plus naturelle que celle des variétés de Schubert classiques.

J. T.

SÉMINAIRE

Michel BROUÉ, Groupes finis et fonctions modulaires (5 exposés).

John H. CONWAY, The Monster and reflections (1 exposé).

PUBLICATIONS

J. TITS, *Définition par générateurs et relations de groupes avec BN-paires* (*C.R. Acad. Sci. Paris,* 293, 1981, 317-322).

— *Algèbres enveloppantes et groupes de Chevalley généralisés* (Actes des Journées « Groupes et Langages », Amiens, mai 1981, 5 p.).

— *Groupes à croissance polynomiale (d'après M. Gromov et al.)* (Sém. Bourbaki, 1980-1981, exposé 572, *Lecture Notes in Math.,* n° 901, Springer-Verlag, 1981, 176-188).

— *A local approach to buildings* (in *The geometric vein, the Coxeter Festschrift,* Springer-Verlag, 1981, 519-547).

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Codirection avec T.A. Springer d'un Colloque sur les Groupes Algébriques, Oberwolfach, juin 1982.

Exposés sur les *Algèbres de Kac-Moody* et les groupes qui leur sont associés, envisagés sous divers aspects : Paris (séminaire Chevalley), octobre 1981 (3 exposés) ; Gand, mars 1982 ; Bonn, avril 1982 ; Grenoble (rencontre annuelle des mathématiciens rhodaniens), mai 1982 ; Stockholm (réunion annuelle de la Société Mathématique Suédoise), mai 1982 ; Oberwolfach, juin 1982.

Autres exposés :

— *Géométries de type* $\tilde{A}_n$, Bruxelles, mars 1982.

— *Simple groups over local fields,* Stockholm (Colloquium), mai 1982.

— *Buildings and diagram geometries,* Stockholm, mai 1982.