Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *Mardi* a été consacré à l'étude systématique des rapports entre feuilletages et variétés de Poisson. La notion de variété de Poisson a été introduite par nous en 1975 comme généralisation contravariante naturelle de celle de variété symplectique. Sur une telle variété, la structure de Poisson détermine un feuilletage symplectique soit en un sens généralisé (variété de Poisson non régulière), soit au sens strict du terme (variété de Poisson régulière). Un exemple naturel simple du premier cas est fourni par les orbites de la représentation coadjointe d'un algèbre de Lie. Un exemple simple du second cas est donné par les fibrés cotangents aux feuilletages.

Soit (M, $\mathcal{F}$) une variété munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$. On a montré que la variété $W = T^* \mathcal{F}$ définie par le cotangent au feuilletage admet une structure de Poisson canonique régulière Λ, dont les feuilles sont les fibrés cotangents des feuilles de $\mathcal{F}$ et qui est tangentiellement exacte. On a caractérisé inversement, à partir d'un théorème de Nagano, les fibrés cotangents à un feuilletage en termes de variété de Poisson tangentiellement exacte et l'on a relié l'orientabilité transverse d'un feuilletage à l'orientabilité de sa variété de Poisson associée. Dans un contexte proche de celui de Godbillon-Vey, on a introduit une l-classe de Λ-cohomologie tangentielle de ($T^* \mathcal{F}$, Λ), naturelle par rapport aux images réciproques par submersion du feuilletage.

On a ensuite introduit systématiquement la notion de *connexion linéaire sans torsion de M adaptée au feuilletage* $\mathcal{F}$ et montré comment une telle connexion peut être relevée sur la variété de Poisson associée. Si M est munie d'une métrique riemannienne, celle-ci détermine d'une manière unique une connexion adaptée déduite de la connexion riemannienne. Les approches de Guelorget-Joubert et B. Reinhart ont été interprétées et généralisées dans ce contexte renouvelé, ce qui a permis deux sortes d'applications elles-mêmes neuves.

D'une part on a mis en évidence, à partir des 2 r-formes caractéristiques du fibré transverse au feuilletage exprimées en termes de connexions adaptées, des r-cocycles de Chevalley de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents au feuilletage opérant par dérivation de Lie sur les r-formes normales à $\mathcal{F}$. Les classes de cohomologie correspondantes sont naturelles par rapport aux images réciproques par submersions du feuilletage ; elles sont profondément distinctes des classes caractéristiques usuelles de (M. $\mathcal{F}$), comme l'a montré l'analyse d'un certain nombre d'exemples.

On a d'autre part donnée une analyse géométrique nouvelle de la notion de métrique riemannienne « de type fibré » pour une variété feuilletée, en termes d'un tenseur Q dont la nullité exprime que le champ de plans orthogonal à $\mathcal{F}$ est totalement géodésique pour la métrique. S'il en est ainsi, le groupe d'holonomie infinitésimale de chaque feuille de $\mathcal{F}$ est relativement compact.

Soit (M, F) une variété symplectique munie d'un *feuilletage lagrangien* $\mathcal{F}$. On a montré qu'il existe toujours sur M une connexion adaptée au feuilletage qui induit sur chaque feuille une *connexion plate* sans torsion. Si la variété admet une métrique riemannienne de type fibré pour $\mathcal{F}$, elle admet une métrique riemannienne qui induit sur chaque feuille une métrique plate. On a ainsi précisé et généralisé des résultats récents d'A. Weinstein et P. Dazord. Les mêmes résultats sont valables si, au lieu d'un feuilletage lagrangien, on considère un feuilletage isotrope de (M, F) tel que le champ des plans orthogonaux symplectiques soit un feuilletage coisotrope.

*
**

Le cours du *Mercredi* a porté sur l'étude de *cohomologies d'algèbres de Lie attachées à une variété de contact* et sur leurs applications à la théorie de certains opérateurs *pseudodifférentiels* sur une variété différentiable compacte.

L'existence même des connexions linéaires sans torsion sur une variété différentiable a conduit à la mise en évidence de cocycles non exacts, générateurs des cohomologies de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de la variété opérant par dérivation de Lie sur les formes. La théorie correspondante a été développée par nous-mêmes et M. De Wilde et est fort proche de celle de l'homomorphisme de Chern-Weil. Des circonstances analogues sont valables pour la cohomologie de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique à valeurs dans cette algèbre. On a ainsi mis en évidence une 2-classe de cohomologie, toujours non nulle, qui définit un invariant universel des structures symplectiques et joue un rôle majeur dans la théorie des déformations des algèbres de Lie de Poisson.

On sait qu'à *une variété de contact* $(\widehat{W}, \widehat{\pi})$ est canoniquement associée *une variété symplectique exacte* (W, ω), où ω est une 1-forme partout non nulle et dont nous notons Z le champ fondamental. L'algèbre de Lie $\widehat{L}$ des automorphismes infinitésimaux de la structure de contact est isomorphe à l'algèbre de

Lie définie par le crochet de Poisson sur l'espace N_1 des fonctions de W à valeurs réelles, *homogènes de degré 1* relativement à Z.

Le cours a porté essentiellement sur l'analyse de la cohomologie de cette algèbre de Lie à valeurs dans l'espace N_h des fonctions de W, homogènes de degré $h \in R$. Cette cohomologie est isomorphe à la cohomologie de l'algèbre de Lie $\widehat{L}$ opérant par dérivation de Lie sur les densités scalaires de $\widehat{W}$ des différents poids. Nous avons introduit le complexifié N_h^c de N_h. Au cas $h = -1$ correspond ici la mise en évidence d'une 2-classe de cohomologie β_1, toujours non nulle, qui est *un invariant universel des structures de contact.*

Après avoir rappelé les faits fondamentaux concernant la géométrie des variétés de contact et des variétés symplectiques exactes associées, nous avons défini les différentes cohomologies envisagées et nous avons déterminé les cohomologies *1-différentielles,* en un sens convenable, de $\widehat{L}$ à valeurs dans les densités scalaires de $\widehat{W}$ des différents poids. Celles-ci ne mettent en jeu que la cohomologie de G. de Rham de la variété $\widehat{W}$.

Nous avons ensuite réussi à déterminer complètement, en degrés 1 et 2, les cohomologies locales de $\widehat{L}$ à valeurs dans les densités scalaires et nous avons mis en évidence la 2-classe fondamentale β_1 qui correspond à $h = -1$. L'un des résultats les plus délicats à établir a été que cette 2-classe n'est jamais nulle.

Dans un important travail, Omori et collaborateurs ont étudié l'algèbre de Lie des *opérateurs pseudodifférentiels d'ordre un* sur une variété différentiable compacte qu'ils munissent d'une structure riemannienne auxiliaire. Les symboles des opérateurs pseudodifférentiels introduits mettent en jeu la variété symplectique exacte $W = T^*M - \{0\}$ (T^* M privé de sa section nulle). L'étude d'Omori que nous avons rappelée dans ses grandes lignes, a dégagé deux suites exactes d'algèbres de Lie, dont l'une définie une 2-classe de cohomologie de N_1 à valeurs dans N_0^c qui est toujours nulle, l'autre une 2-classe de N_1 à valeurs dans N_{-1}^c qui ne l'est jamais. Nous avons montré que cette dernière classe ne diffère pas substantiellement de l'invariant β_1 que nous avons mis en évidence lorsque la variété de contact $\widehat{W}$ envisagée est la variété définie par les directions orientées cotangentes à M. Le point de vue général que nous avons développé nous semble donc placer la théorie d'Omori dans son véritable cadre.

Il résulte de la détermination faite des cohomologies envisagées une autre démonstration de la rigidité de $\widehat{L}$, c'est-à-dire du fait que les déformations différentielles de $\widehat{L}$ sont toujours différentiablement triviales.

A. L.

SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

Y. SCHWARZBACH-KOSMANN, Sur la covariance conforme des équations spinorielles non linéaires.

M. HARTHONG, La propagation des ondes et l'analyse non-standard.

H. SAZDJIAN, Produit scalaire en Mécanique quantique relativiste avec interactions.

J. KLEIN, Connexion définie par un système dynamique et gerbes Lagrangiennes.

BLEULER et PETRY, Nouveau point de vue sur la physique nucléaire.

A. GRECO, Thermodynamique étendue et superfluidité.

P. MOLIN, Invariance de star-produits. Application au groupe de Poincaré.

M. BOUDINICH, Spineurs exotiques.

R. HALL, Curvature and metric in General Relativity.

J. SIMON, Linéarisation d'équations non linéaires de la Physique Mathématiques.

DISTINCTIONS

M. André LICHNEROWICZ a été nommé Docteur honoris causa de l'Université de Liège.

MISSIONS

M. André LICHNEROWICZ a été professeur invité aux Universités de Rome et Palerme (février 1983). Il a été l'un des quatre « conférenciers principaux » au premier Congrès Mathématique Arabe qui s'est tenu à Riyadh en octobre 1982. Il a été conférencier invité au Colloque international de géométrie différentielle organisé par l'Université de Valence en octobre 1982, au symposium international sur « géométrie et physique », organisé par l'Université de Florence (octobre 1982), aux colloques internationaux de géométrie differentielle de Rome (mai 1983) et Lyon (juin 1983). Il a présidé les journées relativistes organisées par l'Université de Turin (mai 1983). Il a donné des cycles de conférences aux universalités de Liège, Rome et Turin.

PUBLICATIONS

A. LICHNEROWICZ, *Variétés de Poisson et feuilletages* (*Ann. Fac. Sci.*, Toulouse, 4, 1982, 195-262).

— *Formes caractéristiques d'un feuilletage et classes de cohomologie de l'algèbre des vecteurs tangents à valeurs dans les formes normales* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, 296, I, 1983, 67-71).

— *Quantum Mechanics and deformations of Geometrical Dynamics* (*Quantum Theory, Groups, Fields and Particles ;* A. O. Barut ed. Reidel, 1983, 3-82).

— *Géométrie différentielle des variétés de contact* (*J. de Math, pures et appl.*, 4, 1982, 345-380).

Adnam HAMOUI et A. LICHNEROWICZ, *Sur la quantification d'un système dynamique à hamiltonien dépendant du temps* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, 294, I, 1982, 705-710).

Henri BASART et A. LICHNEROWICZ, *Variétés de poisson et star-produits tangentiels* (*Ibidem*, 295, I, 1982, 681-685).

A. LICHNEROWICZ et TRAN-VAN-TAN, *Feuilletages, géométrie riemannienne et géométrie symplectique* (*Ibidem*, 296, I, 1983, 205-210).