Physique mathématique

M. André Lichnerowicz, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *Mardi* a été consacré à la géométrie des algèbres de Lie locales de Kirillov. On sait qu'en 1975, Shiga a introduit, pour l'espace des sections d'un fibré vectoriel, la notion d'*algèbre de Lie locale,* le crochet de deux sections présentant le caractère local. Kirillov a étudié en 1976 le cas des sections d'un fibré en droites réelles. Si ce fibré est trivial, il est équivalent d'étudier les algèbres de Lie locales sur l'espace N des fonctions à valeurs réelles définies sur la base W. Il se révèle, ce qui n'est pas apparent chez Kirillov, que ce « cas scalaire » est en fait le plus important et le plus intéressant. Méthodes et résultats s'étendent presque trivialement au cas de Kirillov.

Indépendamment de Kirillov, j'avais introduit en 1975 la notion de structure générale de Poisson et en 1976 celle de *structure générale de Jacobi* sur une variété. Une telle structure est une généralisation contravariante à la fois des structures symplectiques ou de Poisson et des structures de contact. Un des résultats fondamentaux de Kirillov est en fait qu'à toute algèbre de Lie locale est canoniquement associée une telle structure géométrique de Jacobi.

Dans ce cours, nous avons d'abord montré comment l'algèbre de Lie locale (N, [,]) donnée détermine une structure de Jacobi (Λ, E) définie par un 2-tenseur Λ et un vecteur E reliés par des relations qui traduisent l'identité de Jacobi. A deux algèbres de Lie locales, équivalentes en un sens trivial correspond une même *structure conforme de Jacobi.* On est ainsi amené à introduire sur W l'algèbre de Lie L des automorphismes infinitésimaux de la structure conforme de Jacobi. Si $u \in N$, le champ de vecteurs $X = uE + [\Lambda, u]$ est dit *le champ hamiltonien* (généralisé) défini par u. L'algèbre de Lie L* des champs hamiltoniens est un *idéal* de L. Il existe un homomorphisme naturel de (N, [,]) sur L* dont le noyau est le centre de l'algèbre de Lie locale (N, [,]) donnée.

On a ensuite étendu et précisé un théorème de Süssmann (1974) qui constitue une généralisation contravariante du classique théorème de Frobenius. Un champ P de plans est une application $x \in W \to P_x$ sous espace de $T_x W$; P est C^∞ s'il est engendré par des C^∞ champs de vecteurs ; P est ***régulier*** si dim $P_x =$ const. ; il est invariant par un vecteur X s'il est invariant par le flot de X. Un *feuilletage généralisé* (ou pour abréger un feuilletage) de W est défini par un champ P de plans invariant pour tout C^∞ champ de vecteurs lui appartenant. Pour $x \in W$, une feuille S(x) est la variété intégrale maximale unique de P passant par x ; S(x) est une sous-variété faiblement plongée dans W. Pour un tel feuilletage, on a mis en évidence une notion de *carte adaptée* de W. Si P est régulier, on a un feuilletage régulier, c'est-à-dire un feuilletage de Reeb.

Un point x de W est dit régulier s'il existe un voisinage de x sur lequel le feuilletage induit par P est régulier. Si x est régulier, tous les points de S(x) sont réguliers et l'on obtient une notion de feuille régulière ou singulière. L'ensemble des points réguliers de W est un ouvert dense sur W, sur chaque composante connexe duquel P définit un feuilletage régulier.

Cette théorie des feuilletages généralisés ayant été développée, on a pu l'appliquer à une algèbre de Lie locale (N, [,]) et à la structure de Jacobi correspondante. On a introduit de manière naturelle *le champ caractéristique* P de (N, [,]) défini par les valeurs aux différents points de W des champs hamiltoniens de (N, [,]). Il est clair que P ne dépend que de la structure conforme de Jacobi déterminée par (N, [,]). L'algèbre est dite *régulière* si dim $P_x =$ const, *transitive* si $P_x = T_x w$.

On a ainsi pu établir par une méthode originale un énoncé plus précis que l'énoncé fondamental de Kirillov : *le champ caractéristique P de (N [,]) définit sur W un feuilletage (généralisé). Pour chaque feuille S, les restrictions de Λ et E à S déterminent sur S une algèbre de Lie locale transitive qui est dite induite par (N, [,]).*

L'étude de la structure géométrique des feuilles de P faite par Kirillov est totalement insuffisante. Cette structure est pourtant simple sauf dans un cas important qui mérite une étude détaillée particulière et qui semble avoir échappé à Kirillov. Une feuille S *de dimension impaire* satisfait la définition contravariante d'une *variété pfaffienne* (ou variété admettant une 1-forme globale de contact) que j'ai indiquée il y a de nombreuses années. Une feuille S *de dimension paire* est soit globalement conformément symplectique, soit *localement conformément symplectique vraie* (l.c.s.v.), c'est-à-dire non réductible par équivalence au cas symplectique.

Dans une seconde partie du cours, nous avons ainsi été amenés à développer une théorie autonome des variétés localement conformément symplectiques vraies qui s'introduisent naturellement dans le contexte général de

Kirillov. Une telle variété de dimension paire 2n est définie par une 2-forme F de rang 2n telle que :

$$d F + \omega \Lambda F = 0$$

où ω est une 1-forme *fermée non exacte.* Cette théorie fait intervenir de manière essentielle la cohomologie correspondant à l'opérateur d^{ω} sur les formes donné par $d^{\omega} = d + e(\omega)$, où $e(\omega)$ est le produit extérieur par ω. On a interprété en termes de d^{ω}-cohomologie les algèbres de Lie L, [L, L] et L* correspondant à cette situation et généralisé à d^{ω} la théorie *harmonique* de G de Rham. Ceci a permis d'établir les résultats suivants : *l'algèbre (N, [,]) est ici isomorphe à L* et de centre réduit à {0} ; L* coïncide avec son idéal dérivé. Les dérivations de (N, [,]) sont données par* $(\mathcal{L}(Z) + a_Z)$, *où* $Z \in L$ *et* a_Z *est le scalaire associé. L'espace* $H^2(N ; N)$ *de la cohomologie différentielle de Chevalley de (N, [,]) à valeurs dans N associée à la représentation adjointe admet comme générateurs des 2-cocycles 1-différentiables.* Il en résulte qu'il existe ou non des déformations infinitésimales non triviales de (N, [,]), nécessairement équivalentes à des déformations 1-différentiables.

On a montré ainsi que la situation étudiée (variétés l.c.s.v.) était intermédiaire entre celle correspondant aux variétés de contact et celle correspondant aux variétés symplectiques (ou globalement conformément symplectiques). Il restait à raccorder ces différents résultats sur les feuilles pour obtenir des résultats généraux concernant une algèbre de Lie locale. C'est ce qui sera fait dans un prochain cours par usage *de coordonnées distinguées* de W attachées à une feuille.

***

Le cours du *Mercredi* a porté sur la géométrisation des systèmes dynamiques à contraintes et hamiltonien *dépendant explicitement du temps.* Le but de ce cours était de construire un processus cohérent permettant la *quantification* de tels systèmes.

Ce problème de quantification, qui a fait l'objet d'un travail en collaboration avec A. Hamoui, a reçu relativement peu d'attention, bien que son étude soit nécessaire pour un certain nombre de problèmes physiques importants, reliés par exemple à la montée en puissance des lasers ou aux interactions de systèmes dynamiques avec un champ électromagnétique. Des problèmes naturels conduisent à l'étude d'oscillateurs harmoniques dépendant du temps, d'autres mettent en œuvre des conditions aux limites dépendant elles-mêmes du temps. Les différents articles consacrés depuis 1970 à de tels sujets procèdent d'approches variées, mais de nature conventionnelle, de la Mécanique quantique et beaucoup se révèlent à l'étude contradictoires entre eux, voire autocontradictoires.

On sait que, pour les systèmes dynamiques autonomes, une équipe inspirée par M. Flato et nous-même a développé une théorie géométrique de la quantification, en termes de déformations des deux structures algébriques que l'on peut définir à partir de l'espace des fonctions sur l'espace de phase (l'algèbre associative définie par le produit ordinaire des fonctions et l'algèbre de Lie donnée par le crochet de Poisson). On aboutit ainsi à *la théorie des star-produits* qui englobe la quantification conventionnelle et permet des généralisations.

Dans le cas envisagé ici, l'espace des états du système dynamique est de dimension impaire et nous l'avons antérieurement décrit en termes de *variété canonique,* feuilletée en hypersurfaces symplectiques. On obtient ainsi une description géométrique d'une large classe de systèmes dynamiques à contraintes dépendant du temps.

Nous avons repris, de manière adaptée au but poursuivi la définition et l'étude des variétés canoniques et nous avons établi que, sur de telles variétés, la théorie des star-produits peut être généralisée de manière naturelle (star-produits tangentiels). Nous avons ainsi disposé d'un instrument permettant un passage rigoureux et cohérent du cadre de la Mécanique classique à celui de la Mécanique quantique.

Après avoir ainsi posé le cadre géométrique, nous avons développé la dynamique classique d'un système admettant comme espace des états une variété canonique. Nous avons été ainsi conduits à introduire « deux temps », notés t et τ, jouant dans la théorie des rôles distincts ; le temps t joue le rôle d'un *temps géométrique* correspondant au contrôle du système, tandis que τ, qui paramétrise l'évolution joue le rôle d'un *temps dynamique.* Nous avons ensuite considéré la Mécanique quantique comme déformation de la théorie classique, le paramètre de déformation était $\nu = \hbar/2i$, et développé *la théorie spectrale* correspondante. Les résultats de mesures physiques et en particulier l'étude du spectre d'une fonction à valeurs réelles sur l'espace des états mettent en évidence le rôle joué par la variable $(t + \tau)$. Ceci montre, *a posteriori,* que tous les résultats peuvent être interprétés comme souhaitable, en termes d'un seul temps.

Le formalisme que nous avons développé est susceptible de jouer un rôle intéressant dans l'analyse des différents systèmes ouverts et en particulier en Mécanique statistique quantique.

A. L.

SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

P. LECOMTE, Existence de star-produits sur les variétés symplectiques.

C. MORENO, Star-produits et espaces homogènes symétriques.

W.M. TULCZYJEW, Dynamique des particules dans les champs de jauge extérieurs.

C. DE WITT, Un problème de points critiques dégénérés en Théorie W.K.B.

C.J. ISHAM, Some global aspects of quantum theory. Applications to quantum gravity.

L. LUSANNA, From relativistic Mechanics towards Green functions.

C. REINA, Calculus of variations, cohomology and the anomalies in fields Theory.

P. SPINDEL, Supergravity avec $N = 1$, $d = 11$.

P. CHRUSCIEL, L'énergie en Relativité générale : une approche symplectique.

A. WEINSTEIN, Stabilité et structures hamiltoniennes en dynamique des fluides.

V. MONCRIEF, Generalized Taub-Nut space-times.

A. TRAUTMAN, Géométrie optique.

DISTINCTIONS

M. André LICHNEROWICZ a été élu Membre étranger de l'Académie de Turin.

MISSIONS

M. André LICHNEROWICZ a été professeur invité au Massachussets Institute of Technology (février-mars 1984), à l'Université de Rome (avril 1984) et à l'Université de Dijon (mai 1984). Il a été conférencier invité au Colloque international de Physique Mathématique organisé par l'Université de Clausthal (août 1983), aux Journées de Géométrie différentielle de Belgique (Liège, septembre 1983), aux Journées relativistes françaises organisées au Centre Paul Langevin (mai 1984), au Colloque international de Géométrie différentielle organisé par l'Université de Montpellier (mai 1984). Il a enseigné à la session du Centre International de Mécanique de Udine consacrée à « Mécanique Analytique et Mécanique Quantique » (septembre 1983). Il a donné des cycles de conférences à l'Institute for Advanced Studies de Princeton, au Courant Institute de New York, à Brandeis University et Harvard University, à l'University of Maryland, aux Universités de Durham, Liège, Rome et Toulouse.

PUBLICATIONS

A. LICHNEROWICZ, *Cohomologies attachées à une variété de contact et applications* (*J. de Math. pures et appl.*, 62, 269-304, 1983).

— *Sur les algèbres de Lie locales de Kirillov-Shiga* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, 296 I, 915-920, 1983).

— *Dérivations d'algèbres de Lie attachées à une algèbre de Lie locale de Kirillov* (*Ibidem*, 297 I, 261-266, 1983).

A. HAMOUI et A. LICHNEROWICZ, *Geometry of the dynamical systems with time-dependent constraints and time-dependent Hamiltonian : An approach towards quantization* (*J. of Math. Phys.*, 25, 923-931, 1984).

A. LICHNEROWICZ, *Deformations and quantization Proc. of the meeting « Geometry and Physics »* (Florence 1982, Pitagora, Bologne, 103-115, 1983).