Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année était intitulé *Immeubles de type affine : classification et applications aux groupes finis,* mais les applications en question n'ont été que brièvement évoquées ; elles feront l'objet du cours de l'an prochain.

1. Soit I un ensemble fini. Un *complexe au dessus de I,* ou *numéroté par I,* est un complexe simplicial (combinatoire) doté d'une application τ de l'ensemble de ses sommets dans I, application dont la restriction à chaque simplexe est injective. L'image d'un simplexe par τ est son *type.* Sauf mention du contraire, tous les complexes considérés ici sont des complexes numérotés dont les simplexes maximaux sont tous de type maximum (de type I dans le cas présent). On appelle *chambre* d'un tel complexe tout simplexe maximal et *cloison* toute face de codimension 1 d'une chambre. Un complexe est dit *mince* (resp. *épais*) si toute cloison est contenue dans exactement deux (resp. au moins trois) chambres.

Soit Σ un complexe mince. Un *système d'appartements de type* Σ dans un complexe Δ est un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-complexes, appelés *appartements,* tel que tout élément de $\mathcal{A}$ soit isomorphe à Σ (comme complexe numéroté), que deux simplexes quelconques de Δ soient contenus dans un même appartement et que, si deux appartements A_1 et A_2 contiennent l'un et l'autre deux simplexes X, Y, alors il existe un isomorphisme (de complexes numérotés) de A_1 sur A_2 fixant $X \cup Y$. Un *immeuble combinatoire* de type Σ est défini comme un complexe *possédant* un tel système d'appartements (en cela, nous nous écartons quelque peu de la terminologie de J. Tits, *Springer Lecture Notes* n° 386, référence abrégée ci-dessous en [LN]). Le qualificatif « combinatoire » sera omis lorsqu'aucune confusion ne risque d'en résulter.

2. Dans la première partie du cours, on a rappelé, en guise de « motivation », les résultats principaux de deux articles récents (J. Tits, in *Coxeter Festschrift,* Springer, 1981, 519-547 ; A. Brouwer et A. Cohen, *Indag. Math.* 45, 1983, 393-402) caractérisant les immeubles combinatoires par des propriétés locales plus, au besoin, une condition de « simple connexité ». Ces caractérisations sont à la base des applications de la classification que l'on a en vue.

Dans ce résumé, nous ne reprendrons de cette partie introductive du cours que l'énoncé d'un théorème qui s'est révélé utile par la suite, et qui n'est pas explicité dans les articles cités plus haut. Soient $M = (m_{ij})_{i,j \in I}$ une matrice de Coxeter, $W = < r_i | i \in I, (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 >$ le groupe de Coxeter correspondant et Σ le complexe de Coxeter associé (cf. [LN], § 2) : rappelons que c'est un complexe mince dont les chambres sont indexées par W. Soit Δ un complexe au-dessus de I dont chaque cloison est contenue dans au moins deux chambres et tel que l'étoile (cf. [LN], 1.1) de tout simplexe de codimension $\geqslant 2$ soit connexe. Notons Ch Δ l'ensemble des chambres de Δ. Si $\mathbf{i} = i_1 i_2 \ldots i_m$ est un mot, élément du monoïde libre engendré par I, appelons *galerie de type* $\mathbf{i}$ toute suite de chambres $C_0, C_1, \ldots, C_m$ telle que $C_{s-1} \cap C_s$ soit une cloison de type $I - \{i_s\}$ pour tout s.

THÉORÈME 1. *Pour que Δ soit un immeuble de type Σ, il faut et il suffit qu'il existe une « distance »* δ : Ch $\Delta \times$ Ch $\Delta \to W$ *possédant la propriété suivante : pour tout mot réduit (relativement à M)* $\mathbf{i} = i_1 \ldots i_m$ *et pour $C, C' \in$* Ch Δ, *on a* $\delta(C, C') = r_{i_1} \ldots r_{i_m}$ *si et seulement s'il existe une galerie de type* $\mathbf{i}$ *joignant C et C'. Supposons remplie cette condition et appelons « isométrie » d'une partie X de W dans* Ch Δ *toute application $\alpha : X \to Ch\ \Delta$ telle que* $\delta(\alpha(w), \alpha(w')) = w^{-1}w'$. *Alors, toute isométrie $X \to Ch\ \Delta$ se prolonge en une isométrie de W dans* Ch Δ, *les images des isométries $W \to Ch\ \Delta$ forment un système d'appartements de type Σ et tout système d'appartements dans Δ est contenu dans celui-là.*

En particulier, tout immeuble possède un système d'appartements *maximum*. On dira aussi que ce système est *complet*.

3. Soient $\mathbf{V}$ un espace vectoriel réel de dimension finie l, doté d'un produit scalaire défini positif, et $\mathbf{A}$ un espace affine sous $\mathbf{V}$ qui reçoit donc ainsi une structure d'espace euclidien.

Si l'on se donne un groupe $\tilde{W}$ d'isométries de $\mathbf{A}$ qui est discret, irréductible et engendré par des réflexions, on sait que les hyperplans fixes par les réflexions contenues dans $\tilde{W}$ « découpent $\mathbf{A}$ » selon un complexe de Coxeter Σ. Le but principal du cours a été de déterminer tous les immeubles ayant pour appartements de tels complexes de Coxeter (immeubles de *type affine irréductible*) pour $l \geqslant 3$. Cependant, il s'est avéré préférable, débarrassant la question d'hypothèses parasites, d'étudier une situation plus générale, englobant également les immeubles affines de groupes algébriques sur des corps de valuation non discrète (cf. F. Bruhat et J. Tits, *Publ. Math. I.H.E.S.* 41, 1972, 5-251, référence que nous abrégerons en [BT]). On verra qu'une grande partie des raisonnements n'utilise pas l'hypothèse $l \geqslant 3$.

4. Décrivons la situation en question. Soit $\overline{W} \subset \mathrm{GL}(\mathbf{V})$ un groupe irréductible fini engendré par des réflexions et soit W le groupe des affinités de $\mathbf{A}$ dont la partie vectorielle appartient à $\overline{W}$. Les hyperplans fixes par les réflexions

appartenant à $\bar{W}$ sont appelés *murs* (de $\mathbf{V}$). Les composantes connexes du complément dans $\mathbf{V}$ de la réunion de ces murs sont les *chambres vectorielles* : ce sont des cônes simpliciaux (privés de 0) dont les facettes (« ouvertes ») sont appelées les *facettes vectorielles* (de $\mathbf{V}$) ; elles forment une partition de $\mathbf{V}$, laquelle induit une partition de la sphère des directions dans $\mathbf{V}$. Cette dernière partition « est » un complexe de Coxeter Σ^∞, le « complexe à l'infini » de $\mathbf{V}$. On appelle *murs, quartiers, facettes de quartiers, cloisons de quartiers* de $\mathbf{A}$ les ensembles de la forme $a + X$ où $a \in \mathbf{A}$ et X est un mur, une chambre vectorielle, une facette vectorielle, une facette vectorielle de codimension 1 de $\mathbf{V}$.

Nous nous intéresserons aux systèmes constitués par un ensemble $\mathcal{I}$ et une famille $\mathcal{F}$ d'injections de $\mathbf{A}$ dans $\mathcal{I}$ satisfaisant aux axiomes (A1), ..., (A5) énoncés plus bas. Les images des éléments de $\mathcal{F}$ sont appelées *appartements* du système ou encore, par abus de langage, appartements de $\mathcal{I}$. Les *murs, quartiers, facettes de quartiers, cloisons de quartiers* de $\mathcal{I}$ sont, par définition, les images par les éléments de $\mathcal{F}$ des murs, etc., de $\mathbf{A}$. Chaque mur de $\mathbf{A}$ est le bord de deux demi-espaces fermés ; les images de tels demi-espaces par les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés *demi-appartements.* L'axiome (A2) ci-dessous assure que le fait pour une partie d'appartement d'être un demi-appartement, un mur, etc., ne dépend pas de l'appartement dans lequel on le considère. Un *germe de facettes de quartiers* est une classe d'équivalence de telles facettes pour la relation suivante : F_1 et F_2 sont équivalentes si $F_1 \cap F_2$ contient une facette de quartier qui est ouverte dans F_1 et dans F_2. Voici à présent les axiomes en question.

(A1) Si $w \in W$ et $f \in \mathcal{F}$, alors $f \circ w \in \mathcal{F}$.

(A2) Si $f, f' \in \mathcal{F}$, l'ensemble $(f^{-1} \circ f')(\mathbf{A})$ est fermé et convexe dans $\mathbf{A}$ et il existe $w \in W$ tel que f et $f' \circ w$ coïncident sur cet ensemble.

(A3) Deux points quelconques de $\mathcal{I}$ appartiennent à un même appartement.

De (A2) et (A3), on déduit l'existence d'une distance d dans $\mathcal{I}$ qui fait de chaque élément de $\mathcal{F}$ une isométrie de $\mathbf{A}$ sur son image.

(A4) Deux germes de quartiers appartiennent à un même appartement.

(A5) Si $f, f' \in \mathcal{F}$ sont tels que $f(\mathbf{A}) \cap f'(\mathbf{A})$ est un demi-appartement, il existe une rétraction ϱ de $\mathcal{I}$ sur $f(\mathbf{A})$ diminuant les distances et telle que $\varrho(f'(\mathbf{A})) = f(\mathbf{A}) \cap f'(\mathbf{A})$.

On en déduit aussitôt que d est une métrique.

5. Revenons un instant au problème de la détermination de tous les immeubles de type affine Σ, défini comme au n° 3. Soit Δ un tel immeuble, doté d'un système $\mathcal{A}$ d'appartements de type Σ, et considérons la *réalisation géométrique* $\mathcal{I}$ de Δ obtenue en « remplissant affinement » les simplexes : un point de $\mathcal{I}$ est une combinaison linéaire formelle $\Sigma\, c_i v_i$, avec $c_i \in \mathbf{R}$, $c_i > 0$, $\Sigma\, c_i = 1$,

des sommets v_i d'un simplexe de Δ. Chaque isomorphisme de Σ sur un appartement (élément de $\mathscr{A}$) s'étend canoniquement en une injection $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathscr{I}$. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des injections de $\mathbf{A}$ dans $\mathscr{I}$ de la forme $f \circ w$ où $w \in W$ et f est comme ci-dessus. Les résultats de [BT], convenablement adaptés, montrent que $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ satisfait aux axiomes (A1), (A2), (A3), (A5). L'axiome (A4) exprime une propriété supplémentaire — une certaine *symétrie* — du système d'appartements $\mathscr{A}$, dont on peut voir, utilisant le théorème 1 ci-dessus et [BT], 2.9.5, qu'elle est notamment satisfaite lorsque $\mathscr{A}$ est le système d'appartements maximum de Δ (cf. nº 2). Comme, de plus, il est immédiat que $(\Delta, \mathscr{A})$ est entièrement déterminé par $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$, à la numérotation près, on voit que la classification des systèmes $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ satisfaisant aux axiomes (A1) à (A5) a pour cas particulier celle des immeubles de type affine et, plus généralement, des systèmes *symétriques* d'appartements de type affine. La classification de *tous* les systèmes d'appartements de type affine, symétriques ou non, n'est pas un problème raisonnable, même en dimension $\geqslant 3$, car elle implique en particulier la classification de toutes les parties de l'ensemble de Cantor. Lorsque $\mathscr{I}$, $\mathscr{F}$ correspond ainsi à un immeuble combinatoire de type affine (doté d'un système d'appartements symétrique), nous disons qu'on se trouve dans le *cas discret.*

6. La détermination de tous les systèmes $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ (satisfaisant aux axiomes (A1) à (A5) : cela sera toujours sous-entendu désormais) se fait en trois étapes. (I) À tout système $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ on associe un *immeuble à l'infini* $\mathscr{I}^\infty$, qui est un immeuble combinatoire de type Σ^∞ (cf. nº 4). (II) On cherche à reconstruire $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$ à partir de $\mathscr{I}^\infty$; cela nécessite l'introduction de certaines données supplémentaires attachées à $\mathscr{I}^\infty$ mais définies à partir de $\mathscr{I}$. (III) On classe (en dimension $l \geqslant 3$) les données en question.

Commençons par l'étape (I), c'est-à-dire la description de $\mathscr{I}^\infty$. Disons que deux facettes de quartiers F_1 et F_2 de $\mathscr{I}$ sont *parallèles* si elles sont à distance bornée l'une de l'autre, c'est-à-dire si l'ensemble formé des distances d'un point de F_1 à F_2 et des distances d'un point de F_2 à F_1 est borné. Il est clair que le parallélisme est une relation d'équivalence. Disons qu'une classe de parallélisme en *domine* une autre si chaque élément de la première contient un élément de la seconde. Alors, l'immeuble $\mathscr{I}^\infty$ est fourni par la

PROPOSITION 1. *L'ensemble des classes de parallélisme de facettes de quartiers de $\mathscr{I}$, ordonné par la relation de domination, s'identifie à l'ensemble, ordonné par l'inclusion, des simplexes d'un immeuble combinatoire de type Σ^∞. Si A est un appartement de $\mathscr{I}$, l'ensemble des classes de parallélisme qui ont un représentant contenu dans A est l'ensemble des simplexes d'un appartement A^∞ de $\mathscr{I}^\infty$ et l'application $A \mapsto A^\infty$ est une bijection de l'ensemble des appartements de $\mathscr{I}$ sur l'ensemble des appartements de $\mathscr{I}^\infty$. De même, la « trace à l'infini » d'un mur M de $\mathscr{I}$ est un mur M^∞ de demi-appartement dans $\mathscr{I}^\infty$* (cf. [LN], 3.20) (mais l'application $M \mapsto M^\infty$ n'est évidemment pas injective : cf. le nº 8 ci-dessous).

7. Passons à la deuxième étape de la classification et commençons par étudier le cas particulièrement simple où $l = \dim \mathbf{A} = 1$ (et $\overline{W}$ est d'ordre 2). C'est le cas des *arbres*. Plus exactement, si l'on est dans le *cas discret*, $\mathcal{I}$ est un arbre, au sens usuel, sans sommet terminal, et la donnée de $\mathcal{F}$ est équivalente au choix d'une partie dense $\mathcal{I}^\infty$ de l'espace topologique des bouts de cet arbre. Par abus de langage, nous appelons *arbre* tout système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$, avec $\dim \mathbf{A} = 1$, et *bouts de l'arbre* les points de $\mathcal{I}^\infty$ (qui est simplement ici un ensemble sans autre structure). Deux bouts a et b déterminent un appartement, la *droite* joignant a et b, notée $[a, b]$. A tout triplet de bouts distincts, a, b, c, correspond un unique *carrefour*, noté $\varkappa(a, b, c)$, point commun aux droites $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, a]$. Si a, b, c, d sont quatre bouts distincts, soit $\omega(a, b; c, d)$ la distance de $\varkappa(a, b, c)$ et $\varkappa(a, b, d)$ affectée du signe $+$ ou du signe $-$ selon que $\varkappa(a, b, c)$ précède ou suit $\varkappa(a, b, d)$ sur la droite $[a, b]$, orientée de a à b. Les propositions suivantes sont faciles à établir.

Proposition 2. *Si* Card $\mathcal{I}^\infty \geqslant 3$, *l'arbre* $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ *est déterminé à isomorphisme unique près par l'ensemble* $\mathcal{I}^\infty$ *et la fonction* ω.

Proposition 3. *Soient* $\mathcal{I}^\infty$ *un ensemble de cardinal supérieur à* 3 *et* ω *une fonction à valeurs réelles sur l'ensemble des quadruples ordonnés de points distincts de* $\mathcal{I}^\infty$. *Pour que* $(\mathcal{I}^\infty, \omega)$ *définisse un arbre* $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

(VP1) $\omega(a, b; c, d) = \omega(c, d; a, b) = -\omega(a, b; d, c)$;

(VP2) *si* $\omega(a, b; c, d) = k > 0$, *alors* $\omega(a, d; c, b) = k$ *et* $\omega(a, c; b, d) = 0$;

(VP3) *si* $a, b, c, d, e \in \mathcal{I}^\infty$ *sont deux à deux distincts, alors* $\omega(a, b; d, e) + \omega(b, c; d, e) = \omega(a, c; d, e)$.

Nous appelons *valuation projective* sur $\mathcal{I}^\infty$ une fonction ω satisfaisant aux conditions (VP1) à (VP3). Cette terminologie est suggérée par l'exemple suivant.

Exemple. Soit K un corps. Posons $\mathcal{I}^\infty = K \cup \{\infty\}$ et cherchons toutes les valuations projectives sur $\mathcal{I}^\infty$ invariantes par le groupe affine $\{x \mapsto rx + s \mid r \in K^\times, s \in K\}$. Soit ω une telle valuation. Pour $k \in K^\times - \{1\}$, posons $\omega_0(k) = \omega(\infty, 0; 1, k)$ et étendons la fonction ω_0 à K par $\omega_0(0) = \infty$ et $\omega_0(1) = 0$. L'invariance de ω par le groupe affine implique que $\omega(\infty, b; c, d) = \omega_0((c-b)^{-1}(d-b))$. On déduit alors de (VP1) et (VP3) que $\omega_0 : K^\times \to \mathbf{R}$ est un homomorphisme, puis que

$$\omega(a, b; c, d) = \omega_0((d-a)^{-1}(c-a)(c-b)^{-1}(d-b)). \tag{1}$$

Enfin, la simple traduction des axiomes (VP1) à (VP3) montre que

la fonction ω *définie par* (1) *est une valuation projective si et seulement si* ω_0 *est une valuation (de hauteur* 1*) de* K, *au sens usuel.*

Remarquons que l'invariance de ω par le groupe affine entraîne son invariance par le groupe projectif. L'arbre $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ défini par $(\mathcal{I}^\infty, \omega)$ n'est autre, bien entendu, que l'arbre (immeuble affine) de $SL_2(K)$ pour la valuation ω.

[N.B. Dans le cours, je reconstruisais $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ à partir d'une classe de fonctions de deux variables sur $\mathcal{I}^\infty$. La présentation plus symétrique adoptée ici m'a été suggérée par une conversation avec A. Dress qui m'a dit avoir développé, il y a plusieurs années déjà, des considérations proches de celles qui précèdent.]

8. Revenons au cas général. Choisissons dans $\mathbf{A}$ un mur $\mathbf{M}$ et une cloison de quartier $\mathbf{D}$ contenue dans $\mathbf{M}$, et identifions $\mathbf{A}$ au produit direct $\mathbf{R} \times \mathbf{M}$ doté de la métrique évidente.

Si D^∞ (resp. M^∞) est une cloison (resp. un mur) de $\mathcal{I}^\infty$, nous notons $\mathcal{I}(D^\infty)$ l'ensemble des germes de cloisons de quartiers appartenant à la classe de parallélisme D^∞, et $\mathcal{I}(M^\infty)$ l'ensemble des murs de $\mathcal{I}$ dont la trace à l'infini est M^∞. Pour tout élément f de $\mathcal{F}$ tel que $f(\mathbf{D}) \in D^\infty$ (resp. tel que $f(\mathbf{M})^\infty = M^\infty$), désignons par $f_{\mathbf{D}}^\infty : \mathbf{R} \to \mathcal{I}(D^\infty)$ (resp. $f_{\mathbf{M}}^\infty : \mathbf{R} \to \mathcal{I}(M^\infty)$) l'application définie comme suit : si $r \in \mathbf{R}$, $f_{\mathbf{D}}^\infty(r)$ est le germe contenant la cloison de quartier $f(\{r\} \times \mathbf{D})$ (resp. $f_{\mathbf{M}}^\infty(r) = f(\{r\} \times \mathbf{M})$). La proposition suivante est facile à démontrer.

Proposition 4. *Pour toute cloison D^∞ de $\mathcal{I}^\infty$, le système $(\mathcal{I}(D^\infty), \{f_{\mathbf{D}}^\infty | f(\mathbf{D}) \in D^\infty\})$ est un arbre dont les bouts sont en bijection canonique avec les chambres de $\mathcal{I}^\infty$ contenant D^∞. Pour tout mur M^∞ de $\mathcal{I}^\infty$, le système $(\mathcal{I}(M^\infty), \{f_{\mathbf{M}}^\infty | f(\mathbf{M})^\infty = M^\infty\})$ est un arbre dont les bouts sont en bijection canonique avec les demi-appartements de $\mathcal{I}^\infty$ dont le bord est M^∞.*

Les bijections en question peuvent être caractérisées ainsi : pour f « comme ci-dessus », les deux bouts de $f_{\mathbf{D}}^\infty(\mathbf{R})$ correspondent aux deux chambres de l'appartement $f(\mathbf{A})^\infty$ de $\mathcal{I}^\infty$ qui contiennent D^∞ et les deux bouts de $f_{\mathbf{M}}^\infty(\mathbf{R})$ correspondent aux deux moitiés de $f(\mathbf{A})^\infty$ séparées par M^∞. Par abus de langage, on parlera de *l'arbre* $\mathcal{I}(D^\infty)$ et de *l'arbre* $\mathcal{I}(M^\infty)$.

Nous notons Ét D^∞(= étoile de D^∞) l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}^\infty$ contenant D^∞, et Ét M^∞ l'ensemble des demi-appartements de $\mathcal{I}^\infty$ bordés par M^∞. On vient de voir que ces ensembles s'identifient chacun à l'ensemble des bouts d'un arbre ; d'après la proposition 3, ils sont donc dotés de valuations projectives que nous notons respectivement ω_{D^∞} et ω_{M^∞}. Le théorème suivant est le résultat principal de l'étape (II) de la classification (cf. n° 6).

Théorème 2. *Si l'immeuble $\mathcal{I}^\infty$ est épais, le système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ est déterminé à isomorphisme unique près par l'ensemble des valuations projectives ω_{D^∞} associées aux cloisons de $\mathcal{I}^\infty$, et aussi par l'ensemble des ω_{M^∞} associées aux murs de $\mathcal{I}^\infty$.*

La démonstration de ce théorème est longue. Bornons-nous à en indiquer l'idée de base. Soient A^∞ un appartement de $\mathcal{I}^\infty$, C^∞ une chambre de A^∞,

D_i^∞ ($i = 1, \ldots, l$) les cloisons de C^∞ et A_i l'appartement de l'arbre $\mathscr{I}(D_i^\infty)$ dont les bouts correspondent aux deux chambres de A^∞ contenant D_i^∞. Alors, le produit direct $A(A^\infty, C^\infty) = \prod\limits_i A_i$ s'identifie (ensemblistement) à l'appartement A de $\mathscr{I}$ correspondant à A^∞ : si $x \in A$, les germes des cloisons du quartier de A de sommet x et de direction C^∞ sont des points $x_i \in A_i$ et l'on identifie x au point $(x_1, \ldots, x_l)$ de $A(A^\infty, C^\infty)$. On a ainsi « reconstruit » l'appartement A, ou plutôt, une copie de cet appartement pour chaque chambre de A^∞. Tout le problème consiste alors à « recoller » les $A(A^\infty, C^\infty)$, ce qui se fait de proche en proche. Signalons qu'on prouve au passage la

Proposition 5. *Pour tout $x \in \mathscr{I}$ et toute chambre C^∞ de $\mathscr{I}^\infty$, il existe un et un seul quartier de sommet x et de direction C^∞ (c'est-à-dire, dont la classe de parallélisme est C^∞).*

Nous supposerons désormais que $\mathscr{I}^\infty$ est épais et, sauf mention explicite du contraire, que $l \geqslant 2$.

9. Les valuations ω_{D^∞} associées aux diverses cloisons D^∞ ont entre elles des relations qu'il faut à présent examiner.

Si M^∞ est un mur de $\mathscr{I}^\infty$ et D^∞ une cloison contenue dans M^∞, l'inclusion définit une bijection $\pi(D^\infty, M^\infty)$: Ét $D^\infty \longrightarrow$ Ét M^∞, et il est facile de voir que celle-ci « se prolonge » en un isomorphisme d'arbres $\mathscr{I}(D^\infty) \longrightarrow \mathscr{I}(M^\infty)$, ce qui signifie que

$$\omega_{D^\infty} = \omega_{M^\infty} \circ \pi(D^\infty, M^\infty). \tag{2}$$

Si D^∞ et D'^∞ sont deux cloisons appartenant à un même mur M^∞ (par exemple deux cloisons opposées : cf. [LN], 3.22), $\pi(D'^\infty, M^\infty)^{-1} \circ \pi(D^\infty, M^\infty)$ est une bijection de Ét D$^\infty$ sur Ét D$'^\infty$. Nous appelons *perspectivités* les bijections ainsi définies et *projectivités* les produits de perspectivités, et nous notons GP(D^∞) le groupe des projectivités de l'étoile Ét D^∞ sur elle-même. L'utilisation répétée de (2) permet de transporter la valuation projective ω_{D^∞} d'une étoile à une autre : si π : Ét $D^\infty \longrightarrow$ Ét D'^∞ désigne une projectivité quelconque, on a

$$\omega_{D'^\infty} = \omega_{D^\infty} \circ \pi^{-1}. \tag{3}$$

Il résulte de [LN], 3.30, que les classes de la relation d'équivalence entre cloisons de $\mathscr{I}^\infty$ engendrée par la relation d'appartenance à un même mur sont en correspondance biunivoque canonique avec les classes de conjugaison de réflexions du groupe de Weyl $\overline{W}$. Si c (= 1 ou 2) désigne le nombre de ces dernières, on voit donc que *les fonctions ω_{D^∞} peuvent toutes se déduire de c d'entre elles, convenablement choisies.* En fait, on verra plus loin qu'*une seule* fonction ω_{D^∞} suffit toujours à déterminer le système $(\mathscr{I}, \mathscr{F})$, sauf peut-être si $l = 2$ et $|\overline{W}| = 4m$. Remarquons que, vu (3), la valuation ω_{D^∞} est invariante par le groupe GP(D^∞).

Exemple. Supposons $\bar{W}$ de type A_2 (groupe diédral d'ordre 6). Alors, les sommets — donc aussi les cloisons — de $\mathcal{I}^\infty$ sont les points et les droites d'un plan projectif Π, leurs étoiles sont les pinceaux de droites et les droites considérées comme ensembles de points, et notre emploi des mots « perspectivité » et « projectivité » est à peu près celui de Veblen et Young. Dans ce cas, on montre que la condition (3) est *nécessaire et suffisante* pour l'existence du système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$; il s'ensuit que les systèmes $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ ayant le complexe des drapeaux de Π comme immeuble sphérique à l'infini sont en correspondance biunivoque avec les valuations projectives d'une droite de Π invariantes par le groupe des « autoprojectivités » de cette droite. (Il est probable que ce résultat se généralise à tous les groupes $\bar{W}$ pour lesquels $c = 1$.) Si Π est arguésien, donc défini sur un corps K, le groupe $\mathrm{GP}(D^\infty)$ n'est autre que $\mathrm{PGL}_2(K)$ et l'exemple du n° 7 montre alors que les systèmes $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ en question correspondent biunivoquement aux valuations de hauteur 1 du corps K.

10. Soit Φ l'ensemble des parties de $\mathbf{V}$ qui sont des demi-espaces bordés par des murs. Les éléments de Φ sont les *racines* de $\bar{W}$, au sens de [LN]. Choisissons un point de $\mathbf{A}$, noté 0, et un élément f_0 de $\mathcal{F}$, et identifions $\mathbf{V}$, $\mathbf{A}$ et $f_0(\mathbf{A})$ par les bijections $v \mapsto 0 + v \mapsto f_0(0 + v)$. De la sorte, toute racine $a \in \Phi$ devient un demi-appartement de $\mathcal{I}$, auquel correspond un demi-appartement a^∞ de $\mathcal{I}^\infty$. Notons U_a le groupe de tous les automorphismes de $\mathcal{I}^\infty$ fixant l'étoile de toute cloison de $\mathcal{I}^\infty$ contenue dans a^∞ mais non dans son bord ∂a^∞, et soit G le groupe engendré par tous les U_a. Il est facile de voir que chacune des classes de la relation d'équivalence entre cloisons considérée au n° 9 possède un représentant contenu dans a^∞ et non dans ∂a^∞ ; il résulte donc de (3) que

les groupes U_a, donc aussi G, conservent l'ensemble des valuations projectives ω_{D^∞}, donc se prolongent en des groupes d'automorphismes de $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$.

Nous supposerons dorénavant que, pour toute a, le groupe U_a permute transitivement les appartements de $\mathcal{I}^\infty$ contenant a^∞. C'est la *condition de Moufang* (voir le cours de 1973-1974, Annuaire du Collège de France, 73e année, p. 633, et aussi [LN], Appendice), qui est toujours satisfaite lorsque $l = \dim \mathcal{I}^\infty + 1 \geqslant 3$, et aussi lorsque $\mathcal{I}^\infty$ est l'immeuble sphérique d'un groupe algébrique simple, ou d'un groupe de Ree de type ${}^2F_4$, ou encore de l'un des groupes construits dans [LN], 10.3.2. On sait (voir le cours cité et [LN]) que l'immeuble sphérique $\mathcal{I}^\infty$ est alors déterminé par le système de groupes $(G; (U_a)_{a \in \Phi})$, et qu'un tel système (où G est engendré par les U_a et où $C(G) = \{1\}$) provient, de la façon indiquée, d'un immeuble sphérique si et seulement si $(U_a)_{a \in \Phi}$ est une *donnée radicielle de type* Φ au sens suivant (légèrement différent de celui de [BT], § 6) :

(DR1) pour $a, b \in \Phi$ tels que $b \neq \pm a$, l'ensemble de commutateurs (U_a, U_b) est contenu dans le groupe $\langle U_c \mid c \in \Phi - \{a, b\}, c \supset a \cap b \rangle$;

(DR2) pour $a \in \Phi$ et $u \in U_a - \{1\}$, il existe $m(u) \in U_{-a}uU_{-a}$ tel que, pour toute racine $b \in \Phi$, $m(u)U_b m(u)^{-1} = U_{r_a}(b)$, où r_a désigne la réflexion de $\mathbf{V}$ par rapport au bord de a ;

(DR3) si C est une chambre vectorielle de $\mathbf{V}$ contenue dans a, on a $U_{-a} \not\subset \langle U_b | b \in \Phi, b \supset C \rangle$.

De plus, sous ces conditions, l'élément $m(u)$ de (DR2) est unique.

11. Nous indiquerons à présent comment, sous les hypothèses du nº 10, on peut reformuler le théorème 2 et passer à l'étape (III) du programme annoncé au nº 6.

Soit $a \in \Phi$. Pour $u \in U_a - \{1\}$, l'intersection $\mathbf{A} \cap u\mathbf{A}$ est un demi-appartement dont le mur, noté M_u, est parallèle à ∂a. Désignons par $\varphi_a(u)$ la distance entre ∂a et M_u affectée du signe $+$ ou du signe $-$ selon que ∂a est ou non contenu dans $u\mathbf{A}$, et posons encore $\varphi_a(1) = +\infty$ et $\omega_a = \omega_{(\partial a)^\infty}$. Pour u, u', $u'' \in U_a$ on a

$$\omega_a(a^\infty, u(-a)^\infty ; u'(-a)^\infty, u''(-a)^\infty) = \varphi_a(u^{-1}u'') - \varphi_a(u^{-1}u') : \tag{4}$$

si $u = 1$, cela résulte aussitôt des définitions, et le cas général s'en déduit en vertu de l'invariance de ω_a par u. Compte tenu de (VP3), on voit que (4) détermine entièrement la fonction ω_a, une fois connue φ_a, qu'il suffit d'ailleurs de donner à une constante additive près. Le théorème 2 et la discussion du nº 9 montrent alors que

(*) *le système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ est déterminé à isomorphisme près par le système des fonctions φ_a $(a \in \Phi)$, chacune d'elles ne devant être donnée qu'à une constante additive près.*

(On verra au nº 12 un résultat plus précis.) Cela étant, le théorème 3 ci-dessous réalise l'étape (III) du nº 6. Disons, en suivant à peu près la terminologie de [BT], 6.2, qu'un système de fonctions $\psi_a : U_a \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, pour $a \in \Phi$, est une *valuation* de la donnée radicielle (U_a) si les conditions suivantes sont remplies, où l'on note 1_a le vecteur de longueur 1 de $\mathbf{V}$ contenu dans a et orthogonal à ∂a :

(VDR1) Card $\psi_a(U_a) \geqslant 3$;

(VDR2) pour $a \in \Phi$ et $k \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $U_{a,k} = \psi_a^{-1}([k, \infty])$ est un groupe et l'on a $U_{a,\infty} = \{1\}$;

(VDR3) pour $a, b \in \Phi$ tels que $b \neq \pm a$, et pour $k, l \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, l'ensemble de commutateurs $(U_{a,k}, U_{b,l})$ est contenu dans le groupe engendré par les $U_{c,k(c)}$, où c parcourt l'ensemble des racines contenant $a \cap b$ et distinctes de a et b, et où, lorsque $1_c = p1_a + q1_b$, on pose $k(c) = pk + ql$;

(VDR4) pour $a, b \in \Phi$ et $u \in U_a - \{1\}$, il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ telle que $\psi_{r_a(b)}(m(u)vm(u)^{-1}) = \psi_b(v) + k$ pour tout $v \in U_b$; si de plus $b = a$, on a $k = -2\psi_a(u)$. (Ici, $m(u)$ est l'élément défini par la propriété (DR2) du nº 10.)

THÉORÈME 3. *Le système de fonctions* (φ_a) *est une valuation de la donnée radicielle* (U_a). *Réciproquement, toute valuation de cette donnée radicielle détermine (selon (*)) un système* $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ *ayant* $\mathcal{I}^\infty$ *pour immeuble sphérique à l'infini.*

La preuve de la première assertion est un simple exercice. La seconde se démontre en suivant [BT], § 7, qui fournit en outre une construction explicite du système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ à partir de (φ_a).

12. Pour $u \in U_a - \{1\}$, l'affinité de $\mathbf{A}$ (identifié à $f_0(\mathbf{A})$) induite par $m(u)$ est la réflexion par rapport à l'hyperplan $M_u = \partial a + \varphi_a(u)\cdot 1_a$. D'autre part, si $b \in \Phi$ et $v \in U_b - \{1\}$, on a $m({}^{m(u)}v) = {}^{m(u)}m(v)$. Posant $c = r_a(b) = b - 2(1_a, 1_b)a$ et choisissant $u' \in U_c - \{1\}$, on voit alors que

$$\varphi_a({}^{m(v)}u') = \varphi_c(u') - 2(1_a, 1_b)\varphi_b(v). \tag{5}$$

En particulier, si 1_a et 1_b ne sont pas orthogonaux, la fonction φ_a détermine φ_b à une constante additive près. Vu l'irréductibilité de $\overline{W}$ et l'assertion (*) du n° 10, on en déduit la

PROPOSITION 6. *Le système* $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ *est déterminé par la donnée, à une constante additive près, de l'une quelconque des fonctions* φ_a.

13. Dans ce numéro, on ne suppose pas $l \geqslant 2$. Les définitions des données radicielles et des valuations de données radicielles s'étendent sans modification au cas $l = 1$ (d'où $\Phi = \{\pm a\}$). Soient $(U_a)_{a \in \Phi}$ une donnée radicielle (dans un groupe quelconque) et G le groupe engendré par les U_a.

En pratique, la description explicite d'une telle donnée se réfère le plus souvent à un *corps de base*, pour lequel il n'y a d'ailleurs pas toujours un seul choix naturel ; ainsi, pour la donnée radicielle standard de $\mathrm{SL}_n(K)$, où K est une algèbre à division de rang fini sur son centre $Z(K)$, on peut prendre pour corps de base K ou $Z(K)$, selon que l'on considère $\mathrm{SL}_n(K)$ comme groupe classique ou comme « groupe algébrique ».

Soient H l'intersection des normalisateurs des U_a et N le normalisateur de l'ensemble $\{U_a\}$ dans G. On a donc $N/H = \overline{W}$. Supposons pour l'instant qu'on ne se trouve pas dans le cas d'un groupe de Ree ou de Suzuki. Alors, la présence d'un corps de base K se traduit par la donnée d'un réseau X dans le dual de $\mathbf{V}$ et d'une injection $\iota : X \to \mathrm{Hom}\,(H, K^\times_{\mathrm{ab}})$, où l'on note $K^\times_{\mathrm{ab}}$ le groupe multiplicatif de K rendu abélien, ces données jouissant des propriétés suivantes :

le réseau X est stable par $\overline{W}$, et ι est compatible avec les actions naturelles de $\overline{W}$ sur X et sur H rendu abélien ;

pour $a \in \Phi$, il existe $\chi_a \in X$ tel que $a = \chi_a^{-1}([0, \infty])$.

Par exemple, lorsque (U_a) est la donnée radicielle standard dans le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple adjoint $\mathcal{G}$ sur un corps commutatif K (de sorte que G est engendré par les points rationnels des sous-groupes additifs de $\mathcal{G}$ définis sur K), H est l'intersection avec G du centralisateur $\mathcal{H}$ d'un tore déployé maximal de $\mathcal{G}$ et l'on prend pour X le réseau des caractères rationnels de $\mathcal{H}$.

Pour $a \in \Phi$ et χ_a comme ci-dessus, choisissons $u_0 \in U_a - \{1\}$ et soit $\upsilon_a : U_a - \{1\} \to K^\times_{\mathrm{ab}}$ la fonction définie par $\upsilon_a(u) = \chi_a(m(u)m(u_0))$, laquelle ne dépend pas du choix de u_0 à la multiplication près par une constante de $K^\times_{\mathrm{ab}}$. Dans l'exemple considéré plus haut de la donnée radicielle standard d'un groupe algébrique, υ_a est la restriction à $U_a - \{1\}$ d'un polynôme s'annulant en 1 et qu'il est facile de calculer dans chaque cas. Si ω est une valuation de hauteur 1 du corps K, nous notons encore ω l'homomorphisme $K^\times_{\mathrm{ab}} \to \mathbf{R}$ factorisant la restriction de ω à $K^\times$, et nous disons qu'une valuation $(\varphi_a)_{a \in \Phi}$ de la donnée radicielle (U_a) est *compatible* avec ω si l'on a, pour tout a,

$$\varphi_a = \chi_a(1_a)^{-1} \cdot (\omega \circ \upsilon_a) + c^{te}.$$

Si $l \geqslant 2$ et si (φ_a) est la valuation du n° 11, il résulte de la relation précédente et de l'assertion (*) du n° 11 que le système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ est alors déterminé à isomorphisme près par ω. Le théorème suivant, combiné avec le théorème 3, fournit la classification annoncée.

THÉORÈME 4. *Supposons que (U_a) soit la donnée radicielle standard du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique simple sur un corps commutatif K, ou d'un groupe classique sur un corps quelconque K* (cf. [BT], § 10), *ou encore d'un groupe de type* $\mathrm{F}_4(K, K')$ (*resp.* $\mathrm{G}_2(K, K')$) *où K et K' sont des corps de caractéristique $p = 2$* (*resp.* 3) *tels que $K' \supset K \supset K'^p$* (cf. [LN], 10.3.2). *Alors, K est un « corps de base » pour (U_a) au sens qui précède, et toute valuation de la donnée radicielle (U_a) est compatible avec une et une seule valuation du corps K (laquelle détermine donc le système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ lorsque la valuation de (U_a) en question est celle du n°* 11).

Dans le cours, on a donné des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une valuation (φ_a) compatible avec une valuation donnée ω du corps K (pour le cas des groupes classiques, cf. [BT], § 10). Bornons-nous ici à énoncer la

PROPOSITION 7. *Soient (U_a) et K comme dans le théorème* 4. *Alors, pour toute valuation complète ω de K, de hauteur* 1, *il existe une valuation de la donnée radicielle (U_a) compatible avec ω.*

Pour ne pas encombrer l'énoncé du théorème 4, on n'y a pas inclus les groupes « exotiques » de type C_2 (lesquels dépendent non seulement de deux corps K, K' tels que $K' \supset K \supset K'^2$ mais en outre d'un K-sous-espace vectoriel de K' et d'un K'^2-sous-espace vectoriel de K) mais le résultat s'étend sans changement à ces groupes. Dans le cas des groupes de Suzuki et de Ree, il faut prendre pour X non plus un réseau mais un sous- $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ -module de $\mathbf{V}$, et se souvenir de ce que $K^\times$ a également une structure de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ -module.

Pour prouver le théorème 4, on commence par l'établir par des calculs directs dans deux cas particuliers : celui du groupe $PSL_2(K)$ et celui du groupe projectif orthogonal spécial d'une forme quadratique d'indice de Witt 1. Les autres cas se ramènent alors à ceux-là par application du lemme suivant, conséquence assez facile de la relation (5) du nº 12 :

LEMME. *Les hypothèses sont celles du théorème* 4. *Soit* $a \in \Phi$ *et soient* V_a, V_{-a} *des sous-groupes de* U_a, U_{-a}, *normalisés par* H *et formant une donnée radicielle de type* $\{\pm a\}$. *Soient* ω *une valuation du corps* K *et* $(\varphi_b)_{b \in \Phi}$ *une valuation de la donnée radicielle* (U_b). *Alors, pour que la valuation* (φ_b) *soit compatible avec* ω, *il faut et il suffit que la valuation de* (V_a, V_{-a}) *formée des restrictions de* φ_a *et* φ_{-a} *à* V_a *et* V_{-a} *le soit.*

14. Supposons à nouveau $l \geqslant 2$. Nous disons que le système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ est *complet* si la famille d'application $\mathcal{F}$ est maximale pour les axiomes (A1) à (A5), et qu'il est *discret* (ce qui ne veut pas dire que l'espace $\mathcal{I}$ est discret !) si l'on se trouve dans le « cas discret » du nº 5. Comme il faut s'y attendre, le système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ déterminé selon le théorème 4 par une valuation ω du corps de base est complet (resp. discret) si et seulement si la valuation ω est complète (resp. discrète). En particulier, on voit que *les immeubles de type affine ayant pour immeuble sphérique à l'infini l'immeuble associé à l'une des données radicielles considérées dans l'énoncé du théorème 4 correspondent biunivoquement aux valuations discrètes complètes du corps de base K.* Compte tenu du résultat principal de [LN], cela détermine tous les immeubles de type affine irréductible de dimension $l \geqslant 3$.

Tout système $(\mathcal{I}, \mathcal{F})$ se prolonge de façon unique en un système complet. « En général », ce processus de complétion correspond au passage de la valuation ω à sa complétée, mais il existe des exemples un peu pathologiques où les choses ne se passent pas ainsi (cf. [BT], 10.1.16 b)).

15. Si l'on s'intéresse seulement aux immeubles affines localement finis, les corps K qui interviennent sont les corps localement compacts non discrets et totalement discontinus. Même sur de tels corps, les groupes classiques et, bien entendu, les groupes « exotiques » du théorème 4 ne sont pas nécessairement les groupes algébriques simples (cas des groupes orthogonaux de formes défectives par exemple), mais on vérifie aisément que, toujours pour les corps en question, l'immeuble sphérique d'un groupe « non algébrique simple » (muni d'une donnée radicielle) est, dans tous les cas, isomorphe à l'immeuble d'un groupe algébrique simple. D'où le

COROLLAIRE. *Les immeubles localement finis de type affine irréductible et de dimension* $l \geqslant 3$ *sont les immeubles affines des groupes algébriques simples de rang* l *sur les corps localement compacts non discrets et totalement discontinus* (cf. [BT], 6.2.3 *c*) et aussi Proc. Symp. P. Math. 33, 1979, vol. 1, 29-69).

J. T.

PUBLICATIONS

J. TITS, *Evariste Galois, son œuvre, sa vie, ses rapports avec l'Académie* (Académie des Sciences, Gauthier-Villars, Paris, 1982, 10 pp.).

— *Moufang octagons and the Ree groups of type* $^2F_4$ (*Amer. J. Math.* 105, 1983, 539-594).

— *On the distance between opposite vertices in buildings of spherical type* (Appendice à « *Some remarks on Tits geometries* » par A.E. BROUWER et A.M. COHEN, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* A86 = *Indag. Math.* 45, 1983, 400-402).

MISSIONS

Exposés

— *Le Monstre* (*d'après R. Griess, B. Fischer et al.*), sém. Bourbaki, novembre 1983.

— *Classification of affine buildings and applications to finite groups and geometries,* Oberwolfach (Tagung : Graphen, Gruppen und Kammernsysteme), avril 1984 ; Jerusalem, mai 1984.

— Issai Schur Memorial Lectures, Tel-Aviv, mai 1984 : *The Monster group : an elementary introduction ; On Griess' construction of the Monster group.*

— *Groups and group functors attached to Kac-Moody data,* Bonn (25. Arbeitstagung), juin 1984.

— *Avatars des grands théorèmes de classification d'Elie Cartan,* Lyon (Colloque Elie Cartan), juin 1984.

— *Mathématique : art ou science naturelle,* Mons (Soc. des Sciences et des Lettres du Hainaut), décembre 1983.

— *Symétries,* Paris (Académie des Sciences), janvier 1984.