Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours du *Mardi* a porté encore sur la géométrie des algèbres de Lie locales de Kirillov. Après avoir rappelé les résultats essentiels analysés dans le cours de l'an dernier, nous avons d'abord montré comment à toute algèbre de Lie locale (N, [,]) sur l'espace N des fonctions à valeurs réelles sur une variété W est canoniquement associé sur $\tilde{W} = W \times \mathbb{R}$ une *structure de Poisson* $\tilde{\Lambda}$, homogène et de degré-1 par rapport au champ de vecteurs fondamental déterminé par les droites facteurs. Inversement une telle structure de Poisson détermine sur W une *structure de Jacobi* (Λ, E) et par suite une algèbre de Lie locale de Kirillov. Nous avons étudié les relations entre les feuilles symplectiques de ($\tilde{W}$, $\tilde{\Lambda}$) et les feuilles de la variété de Jacobi (W, Λ, E).

Nous avons ensuite été amenés à introduire la notion de *carte distinguée* au voisinage d'un point de (W, Λ, E). A cet effet, on a d'abord établi que si x appartient à une variété de Poisson (W, Λ) celle-ci est localement isomorphe au produit d'une variété symplectique par une variété de Poisson de rang nul en x. A partir de la notion de variété de Poisson attachée à une variété de Jacobi, on en déduit l'existence de cartes distinguées au voisinage de tout point x d'une variété de Jacobi. Si la feuille S (x) passant par x est de dimension paire, on se ramène par équivalence au cas où cette feuille est symplectique sur un voisinage de x et on montre que la variété de Jacobi est localement isomorphe à un presque-produit d'une variété symplectique par une variété de Jacobi de rang nul en x. Le cas où la feuille S (x) est de dimension impaire est plus délicat ; on montre que la variété de Jacobi est localement isomorphe à une diagonale du produit d'une variété pfaffienne par une variété de Jacobi de rang 1 en x.

Tout point singulier x de la variété de Jacobi envisagée étant limite de points réguliers la notion de carte distinguée au voisinage de x permet d'effectuer éventuellement des passages à la limite relatifs à des vecteurs ou tenseurs de manière assez aisée.

Cette méthode a été appliquée en particulier à l'étude des *dérivations* de l'algèbre de Lie L des automorphismes infinitésimaux (a.i) de la structure conforme de Jacobi, de celles de l'algèbre de Lie L^* des champs hamiltoniens de la variété de Jacobi envisagée et de celles de l'algèbre de Lie locale (N, [,]) elle-même. Les résultats généraux établis ont été les suivants : les dérivations de L^* sont données par $X \in L^* \to [Z, X] \in L^*$, où Z est un élément de L ; les dérivations de L sont toutes intérieures. Toute dérivation de (N, [,]) est donnée par $\mathcal{L}(Z)\, u + au + Du$ où Z appartient à L, a est le scalaire correspondant et où D est un opérateur non local nul sur [N, N] à valeurs dans le centre de (N, [,]).

Soit W_1 la plus grande sous-variété ouverte dont toutes les feuilles sont globalement conformément symplectiques ; on établit que le support de D est contenu dans $\overline{W}_1$. Un cas typique est celui d'une variété régulière dont les feuilles, toutes compactes sont globalement conformément symplectiques ; D est donné par un opérateur linéaire arbitraire sur le centre de (N [,]) opérant sur l'intégrale naturelle d'un élément de N sur une feuille.

Dans une seconde partie du cours, nous avons montré comment la quasi-totalité des résultats obtenus dans le cas scalaire s'étend aux algèbres de Lie locales (Γ (K), [,]) définies sur *l'espace Γ (K) des sections d'un fibré $K \to W$ en droites réelles*. On retrouve ainsi la notion générale de structure conforme de Jacobi introduite par moi-même en 1976 indépendamment de Kirillov. Les notions d'algèbre de Lie L des a.i. de cette structure et d'algèbre de Lie L^* des champs hamiltoniens associés aux sections s'obtiennent immédiatement. Il en est de même pour celle de feuilletage généralisé défini par la structure et pour celle de structure de Poisson sur K attachée à l'algèbre de Lie locale. Il en résulte que la notion de cartes distinguées et les résultats concernant les dérivations subsistent intégralement. La géométrie des feuilles correspondantes a été étudiée de manière fine. On a mis en évidence, dans le cas d'une feuille de dimension impaire, l'apparition de structures de contact non orientables et, dans celui d'une feuille de dimension paire, celle de structures localement conformément symplectiques en un sens généralisé.

Dans ce dernier cas, on a montré que la nature des déformations de (Γ (K), [,]) supposée transitive, est liée à la nature du fibré $K \otimes K \to W$. Si cet espace est symplectiquement trivial, l'algèbre de Lie (Γ (K), [,]) admet toujours des déformations non triviales non équivalentes à des déformations 1-différentiables, mais, dans ce contexte, il ne peut exister d'objets correspondant à la notion de star-produit associé à une variété de Poisson. L'étude de ces déformations nouvelles d'algèbre de Lie sera poursuivi ultérieurement.

*
**

Le cours du *Mercredi* a été consacré aux applications de la théorie des déformations à la *Mécanique statistique* et, en particulier, aux conditions

K.M.S. (Kubo - Martin - Schwinger). On sait que ces conditions célèbres, valables dans le cadre classique comme dans le cadre quantique, caractérisent les états dynamiques qui non seulement sont stationnaires, mais sont des états de Gibbs.

On a rappelé comme point de départ qu'une algèbre associative (N, o) sur l'espace N des fonctions à valeurs réelles sur une variété différentiable W n'est *locale* que s'il existe une fonction f appartenant à N telle que uov = fuv (u, v éléments de n). Pour que (N, o) admette un élément unité e, il faut et il suffit que f soit partout $\neq 0$ et $e = f^{-1}$. Une première partie du cours a étudié les déformations formelles notées $*^f_\nu$ satisfaisant à la condition de parité d'une telle algèbre (ν paramètre de déformation). On a d'abord montré, à partir de considérations cohomologiques, que si une déformation infinitésimale est prolongeable à un terme en ν^2, on a :

$$u *^f_\nu v = fuv + \nu P^f(u, v)$$

où P^f est le crochet de la structure conforme de Poisson déduite d'une structure de Poisson Λ par le facteur conforme f ; P^f définit sur N une structure d'algèbre de Lie. En particulier si la structure Λ est symplectique, on voit s'introduire naturellement sur W la géométrie symplectique conforme. On a supposé dans la suite que (W, Λ) est une variété symplectique de dimension finie ou infinie et dans ce dernier cas, satisfaisant à des hypothèses générales.

On a ainsi été amené à introduire sur (W, Λ, f) la notion de $*^f$-produit, déformation de (N, o) satisfaisant à la condition de parité et admettant un élément unité. On a montré comment un tel produit peut être engendré par un star-produit $*_\nu$ de la variété symplectique et par un élément inversible f_ν :

$$u *^f_\nu v = u *_\nu f_\nu *_\nu v$$

On a établi que si tous les star-produits de (W, Λ) sont équivalents, il en est de même pour les $*^f$ - produits.

Nous avons ensuite étudié la notion de déformation (préservant la condition de parité) d'un $*^f$ - produit et celle d'équivalence entre telles déformations. On disposait ainsi de déformations à deux paramètres, l'un pouvant en Physique être identifié à $\hbar/2i$, l'autre à $\beta = 1/kT$, où T est la température du système physique et k la constante de Boltzmann. On a montré en particulier que si, sur (W, Λ), tous les star-produits sont équivalents, chaque $*^f$ - produit de (W, Λ) est *rigide* dans la classe des $*^f$ - produits.

Cette étude mathématique a pu être appliquée directement à la *Mécanique statistique*. Considérons un système physique admettant comme espace de phase une variété symplectique (W, Λ) munie d'un star-produit noté $*$; nous supposons que la star-exponentielle $\mathrm{Exp}_*(\beta H)$, où H est l'hamiltonien du système, appartient à l'espace fonctionnel sur lequel $*$ est défini ;

$\mathrm{Exp}_*(-\beta H)$ décrit dans le cadre quantique *l'ensemble canonique*. L'étude faite antérieurement conduit naturellement à faire reposer la Mécanique statistique sur l'introduction de produits associatifs de la forme :

$$u \,\bar{*}_\beta\, v = u * f_\beta * v \qquad f_\beta = \mathrm{Exp}_*(c\,\beta\, H) \quad (c \in \mathbb{R}\ ;\ c \neq 0)$$

qui sont des $*^f$ - produits. Par antisymétrisation, on obtient des crochets d'algèbre de Lie notés, $[,]\,\bar{*}_\beta$.

Désignons par $\omega(a)$ la valeur d'attente pour un état ω de l'observable a. En termes de star-produit, la condition (KMS) quantique s'écrit à la suite des travaux de Haag et D. Kastler :

$$\omega(a * b) = \omega(b * \alpha_{i\hbar\beta}(a))$$

où l'on a introduit l'opérateur d'évolution :

$$\alpha_t(u) = \mathrm{Exp}_*((i/\hbar)\, t\, H) * u * \mathrm{Exp}_*(-(i/\hbar)\, t\, H)$$

En formant la limite classique de la condition précédente, on obtient pour la condition (KMS) classique la forme :

$$\omega(P(a, b)) = -\beta\, \omega(b\, P(H, a))$$

où P est l'opérateur de crochet de Poisson. On a montré que cette condition est équivalente à :

$$\omega\left(e^{\frac{\beta}{2}H}\,[a, b]_\beta\right) = 0$$

où $[,]_\beta$ est le crochet associé à la structure conforme symplectique correspondant au facteur conforme $e^{-(\beta/2)H}$.

On a ensuite établi que, sous des hypothèses très générales, la condition (KMS) quantique est équivalente à :

$$\omega\left(\mathrm{Exp}_*\left(\frac{\beta}{2} H\right) * [a, b]\,\bar{*}_\beta\right) = 0$$

où $[,]\,\bar{*}_\beta$ est le crochet déduit par antisymétrisation du produit associatif $\bar{*}_\beta$ correspondant à $f_\beta = \mathrm{Exp}_*\left(-\frac{\beta}{2} H\right)$.

On a ainsi mis en évidence le rôle joué en mécanique statistique par la géométrie symplectique conforme et la théorie des déformations, la forme géométrique prise par les conditions (KMS) permettant une meilleure intelligence de leur signification.

Séminaires

Les principaux séminaires ont été les suivants :

Ph. Spindel, Stabilité et modèles cosmologiques en supergravité d = 11.

Pham-Mau-Quan, Géodésiques fermées des métriques perturbées sur les C-variétés.

R. Ruffini, Stabilité et morphologie des galaxies.

J. Duistermaat, Differential equations in spectral parameter.

A.H. Taub, Positive energy theorems in Kaluza-Klein theories.

S.I. Husain, On some manifolds with indefinite metrics.

Mme H. Hu, Non linear partial differential equations admitting integrable systems.

M. Cahen et S. Gutt, Inégalités de Morse d'après Witten.

D. Arnal, Star-produits tangentiels sur le dual d'une algèbre de Lie nilponente.

N.H. Ibragimov, Steps towards the solution to Bäcklund's problem.

Distinctions

M. André Lichnerowicz a été nommé Docteur honoris causa de l'Université de Coïmbra.

Missions

Monsieur André Lichnerowicz a été professeur invité à l'Université of California at Los Angeles (novembre-décembre 1984) et à l'Institut catalan de Recherches mathématiques de Barcelone (mars 1985). Il a été conférencier invité au Colloque international de géométrie différentielle organisé par l'Université de Santiago de Compostelle (septembre 1984), au Colloque de Physique Mathématique organisé par l'Université de Coïmbra (octobre 1984), au Colloque commémoratif du Circolo Matematico di Palermo, aux Journées de Géométrie différentielle de Belgique (Liège, avril 1985), au Colloque international organisé par l'Université de Valencia (mai 1985) et aux Journées de Géométrie différentielle organisées par l'Université de Marseille (mai 1985). Il a donné des conférences à l'University of California at Berkeley et aux Universités de Bruxelles, Lyon et Limoges.

Publications

F. Guédira et A. Lichnerowicz, *Géométrie des algèbres de Lie locales de Kirillov* (*J. de Math. pures et appl.*, 63, 407-484, 1984).

H. Basart, M. Flato, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Déformations et Mécanique statistique* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, 298 I, 405-410, 1984).

— *Deformation Theory applied to Quantization and Statistical Mechanics* (*Lett. in Math. Physics*, 8, 483-494, 1984).

A. Lichnerowicz, *Variétés de Jacobi, représentation coadjointe et espaces homogènes de contact* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, 299 I, 685-689, 1984).