Théorie des groupes

M. Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année avait pour titre : *Immeubles affines, groupes arithmétiques et géométries finies.* Il a porté essentiellement sur l'étude des groupes d'automorphismes d'immeubles qui permutent transitivement les chambres et, plus spécialement, sur le cas des immeubles localement finis *de type affine* et des groupes *discrets* d'automorphismes ; ces hypothèses impliquent souvent qu'il s'agit alors de groupes arithmétiques, en vertu du théorème d'arithméticité de Margulis et de la classification des immeubles de type affine, exposée dans le cours précédent (dans tout ce résumé, « arithmétique » est pris au sens de « S-arithmétique »). L'intérêt suscité ces temps derniers par la recherche systématique d'immeubles localement finis de type affine possédant un groupe discret d'automorphismes transitif sur les chambres résulte notamment des possibilités éventuelles d'application au « révisionnisme » en théorie des groupes finis (voir en particulier diverses publications et prépublications récentes de F. TIMMESFELD).

1. *Un théorème « négatif » : classification*

1.1. *Position du problème et énoncé du résultat.* Soient K un corps local localement compact, k son corps résiduel, G un groupe algébrique sur K, absolument presque simple et simplement connexe, de rang relatif $\geqslant 2$, et Δ l'immeuble affine de G sur K. Le groupe des points rationnels de G sur K est aussi noté G. On se propose d'étudier les groupes discrets Γ d'automorphismes de Δ qui permutent transitivement les chambres de Δ. (Sauf mention explicite du contraire, les automorphismes d'immeubles que nous considérons sont toujours supposés préserver les types des sommets ; Aut Δ désigne le groupe des automorphismes de Δ possédant cette propriété.) L'intérêt de la question réside en partie dans le fait que *l'existence d'un tel groupe d'automorphismes s'avère extrêmement rare* ; comme on peut dès lors s'y attendre, la plupart des cas d'exception sont des objets qui méritent d'être examinés de plus près.

Les idées de base pour la démonstration du résultat que nous venons d'énoncer en termes vagues sont simples et peu nombreuses ; elles ont été trouvées indépendamment (sous des formes parfois un peu différentes) par W. KANTOR et par l'auteur. Cependant, leur mise en œuvre, menant à la détermination complète des exceptions, nécessite de nombreuses distinctions de cas et des raisonnements *ad hoc* qui n'ont pas tous été exposés dans le cours. Ce travail a été accompli en grande partie par W. KANTOR et R. LIEBLER. L'énoncé qui suit est basé sur une communication personnelle de W. KANTOR.

THÉORÈME 1. - *Si l'immeuble* Δ *possède un groupe discret d'automorphismes permutant les chambres transitivement, l'une des conditions suivantes est remplie :*

$K = \mathbf{Q}_2$ *et* G *est déployé de type* A_2, B_2, G_2, A_3, B_3 *ou* D_4 ;

$K = \mathbf{Q}_2$ *et* G *est quasi-déployé de type* A_3 ;

$K = \mathbf{F}_2((t))$ *et* G *est déployé de type* A_2 ;

$K = \mathbf{Q}_3$ *et* G *est déployé de type* C_2 *ou quasi-déployé de type* A_3 ;

$k = \mathbf{F}_8$ *et* G *est déployé de type* A_2.

(Pour ce dernier cas, voir le n° 3.2 ci-dessous.) Signalons que des résultats apparentés à celui-là ont été obtenus par F. TIMMESFELD, dont les méthodes, très différentes des nôtres, relèvent essentiellement de la technique fine des groupes finis.

Comme cela a été fait dans le cours, nous illustrerons les idées générales de la preuve de ce théorème en traitant quelques exemples typiques. Un ingrédient essentiel est la classification des groupes algébriques simples sur les corps locaux localement compacts, due à M. KNESER, F. BRUHAT et l'auteur ; pour celle-ci, nous renvoyons à l'exposé paru dans les *Proc. Symp. Pure Math.* 33 (1979), 29-69, exposé désigné ci-après par le sigle [PSPM].

1.2. *Un « analogue fini »*. Le problème suivant est en quelque sorte l'analogue de celui qui nous intéresse pour les immeubles finis : soit H le groupe des points rationnels d'un groupe absolument simple (donc adjoint) de rang relatif $\geqslant 2$ sur un corps fini et soit Δ_H son immeuble sphérique ; quels sont tous les sous-groupes de Aut Δ_H transitifs sur les chambres de Δ_H ? Ce problème a été résolu par D. HIGMAN dans le cas des groupes linéaires et par G. SEITZ en général. La réponse est que, « sauf exceptions » (une dizaine en tout), un tel groupe contient le groupe dérivé de H (*Annals of Math.* 97 (1973), 27-56 ; aux exceptions énumérées là, il faut ajouter le groupe de type C_2 sur $\mathbf{F}_3$, correction signalée dans un complément inédit à l'article de G. SEITZ en question).

1.3. *Notations et premières réductions.* Soient G, K, k, Δ, Γ comme en 1.1., p la caractéristique de k, C une chambre de Δ, v_0, ..., v_ℓ les sommets de C, Γ_i

le stabilisateur de v_i dans Γ, Δ_i l'étoile de v_i dans Δ et $\overline{\Gamma}_i$ le groupe d'automorphismes de Δ_i induit par Γ_i. L'immeuble Δ_i est l'immeuble sphérique d'un groupe semi-simple adjoint H_i défini sur k et $H_i(k)$ s'identifie à un sous-groupe de Aut Δ_i. Soit H_i^o le sous-groupe de $H_i(k)$ engendré par ses p-éléments. On sait que H_i^o contient le groupe dérivé de $H_i(k)$ et qu'il est son propre groupe dérivé $H_i^{o'}$, sauf si $k = \mathbf{F}_2$ et si H_i possède un facteur déployé de type A_1, B_2, G_2 ou non déployé de type A_2, ou encore si $k = \mathbf{F}_3$ et si H_i possède un facteur déployé de type A_1. Nous supposerons désormais que :

(*) pour au moins deux valeurs de i, $\overline{\Gamma}_i \supset H_i^o = H_i^{o'}$

et que

(**) $\overline{\Gamma}_i \supset H_i^o$ pour tout i.

Il est facile de voir que, sauf dans un très petit nombre de cas, l'hypothèse (**) est conséquence de (*), laquelle est, à son tour, « presque toujours » satisfaite en vertu du théorème de Seitz cité plus haut ; les exceptions, dont il est facile de dresser la liste (utilisant aussi [PSPM]), et qui sont d'ailleurs à l'origine de la plupart des exceptions du théorème 1, doivent faire l'objet d'un traitement à part (parfois assez compliqué).

Soit $\Gamma_i^{(\infty)}$ le « terme infini » de la suite dérivée de Γ_i ; il est contenu dans l'image de G dans Aut Δ (cela résulte de ce que G est son propre groupe dérivé, d'après un théorème de V. Platonov, de la structure connue de Aut Δ et du fait que tout groupe fini d'automorphismes de K est résoluble). Vu (*), l'image de $\Gamma_i^{(\infty)}$ dans $\overline{\Gamma}_i$ permute transitivement les chambres de Δ_i pour au moins deux valeurs de i. Il s'ensuit que le groupe engendré par les $\Gamma_i^{(\infty)}$ permute transitivement les chambres de Δ. Quitte à remplacer Γ par ce groupe, nous supposerons dorénavant que Γ *est son propre dérivé* et qu'il est contenu dans l'image de G dans Aut Δ. Comme le stabilisateur de v_i dans G est le groupe des points entiers d'un schéma en groupes *connexe* sur l'anneau des entiers de K (cf. *Publ. Math. I.H.E.S.* 60 (1984), n° 5.2.9., p. 165), on a alors $\overline{\Gamma}_i \subset H_i(k)$, d'où, vu (**),

$$|\overline{\Gamma}_i|_p = |H_i(k)|_p \ . \tag{1}$$

1.4. *Le cas d'inégale caractéristique.* Soit car $K = 0$. Supposons pour l'instant que G soit un groupe déployé. Alors, l'un des H_i, disons H_0, est le groupe de Chevalley sur k de même type que G. Vu (**), Γ_0 contient H_0^0. L'image réciproque $\tilde{H}_0^0$ de H_0^0 dans Γ est une extension finie de H_0^0. Soit ρ une représentation projective (complexe) non triviale de G, de dimension minimum. Alors, la restriction de ρ à $\tilde{H}_0^0$ est une représentation projective de ce groupe, de dimension dim ρ et de noyau central. Utilisant un théorème de W. Feit et l'auteur sur les représentations de dimension minimum des extensions de groupes, on en déduit facilement que H_0^0 doit avoir une représentation projective complexe de dimension $\leqslant$ dim ρ. Mais l'on sait que, sauf très rares exceptions, le minimum de la dimension des représentations projectives complexes fidèles d'un groupe de Chevalley (simple) fini est strictement supérieure au minimum de la dimension des représentations projectives fidèles du groupe algébrique simple complexe de même type (cf. V. LANDAZURI et G. SEITZ, *J. of Algebra*, 32 (1974), 418-443). A nouveau, les quelques cas d'exception doivent être traités séparément. La même méthode s'applique lorsque G n'est pas déployé : on observe que, presque toujours, il existe un indice i tel que la dimension minimum d'une représentation projective complexe fidèle de H_i° (dimension dont une borne inférieure est fournie par l'article cité de LANDAZURI et SEITZ) est supérieure à la dimension d'une représentation projective non triviale de G.

1.5. *Le cas d'égale caractéristique*

a) La proposition suivante, valable dans tous les cas, est particulièrement utile en égale caractéristique.

PROPOSITION 1. - *Un sous-groupe du stabilisateur de v_i dans G permutant transitivement les chambres de Δ contenant v_i ne peut être contenu dans un K- sous-groupe parabolique propre P de G.*

En effet, P fixe un point y dans la « réalisation géométrique » de l'immeuble sphérique de G sur K, lequel s'identifie à l'*immeuble à l'infini* de Δ (voir le cours de l'an dernier). Cela étant, $P \cap \mathrm{Stab}_G v_i$ fixe la demi-droite de Δ d'origine v_i et de direction y, donc aussi la facette de l'étoile Δ_i de v_i qui contient le « début » de cette demi-droite. Cela exclut que $P \cap \mathrm{Stab}_G v_i$ permute transitivement les chambres de Δ_i.

b) Dorénavant, nous supposerons que car $K = p$. Si J est une partie de $I = \{0, \ldots, l\}$, nous notons Γ_J l'intersection des Γ_j pour $j \in J$, U un p -sous-groupe de Sylow de Γ_I et U_J le fixateur dans U de l'étoile du simplexe $\{v_j | j \in J\}$. Le groupe U est aussi un p -sous-groupe de Sylow Γ_J pour tout J, et U_J est distingué dans Γ_J (cette propriété, dont on pourrait se passer dans la suite au prix de quelques circonlocutions, se prouve en utilisant par exemple les schémas en groupes attachés aux facettes de Δ). Observons que, pour $i \in I$,

$$(2) \qquad |\overline{\Gamma}_i|_p = [U : U_i] \; .$$

c) *Cas des groupes de type A_n intérieur.* C'est le cas d'un groupe $G = \mathrm{SL}_{l+l}(D)$, où D est une algèbre à division de centre K et de dimension finie. Pour le traiter, on utilise le lemme suivant, généralisation facile d'une propriété connue des représentations linéaires de SL_n en caractéristique naturelle.

LEMME 1. - *Soient E un groupe fini, d un corps fini de caractéristique p et $\rho : E \to \mathrm{PGL}_{l+1}(D)$, $\varphi : E \to \mathrm{PGL}_{m+1}(d)$ des homomorphismes tels que $\varphi(E) \supset \mathrm{PSL}_{m+1}(d)$.*

Si $m > l$, on a $\varphi(\mathrm{Ker}\ \rho) \supset \mathrm{PSL}_{m+1}(d)$. Supposons $l = m$ et ρ injectif, soient S un p -sous-groupe de Sylow de E, S_1 l'image réciproque dans S du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique P' d'ordre maximum (i.e. stabilisateur d'un point ou d'un hyperplan dans la représentation projective naturelle) de $\mathrm{PSL}_{m+1}(d)$ contenant $\varphi(S)$ et P le normalisateur de S_1 dans E. Alors, $\rho(P)$ stabilise un unique sous-espace propre de $\mathbf{P}_l(D)$, ce sous-espace est un point ou un hyperplan et est le seul sous-espace de sa dimension stable par S.

Supposons les sommets v_i de C rangés dans l'ordre cyclique naturel (le graphe de Dynkin affine de G est ici un polygone à $l+1$ côtés), et identifions I à $\mathbf{Z}/(l+1)\mathbf{Z}$. Soient d le corps résiduel de D, E le groupe $\overline{\Gamma}_i$, S le sous-groupe U, φ la projection canonique $\Gamma_i \to \overline{\Gamma}_i$, ρ l'homomorphisme d'inclusion de Γ_i dans $\mathrm{PGL}_{l+1}(D)$ (identifié avec son image canonique dans $\mathrm{Aut}\,\Delta$) et P' le stabilisateur de l'arête v_iv_{i+1} dans $\mathrm{PSL}_{l+1}(d)$ (opérant sur l'étoile de v_i de façon évidente). Vu b), le groupe P du lemme contient $\Gamma_{\{i,\,i+1\}}$ et le lemme implique l'existence d'un sous-espace X_i, point ou hyperplan, de $\mathbf{P}_l(D)$ stable par $\Gamma_{\{i,\,i+1\}}$ et qui est l'unique point ou l'unique hyperplan de $\mathbf{P}_l(D)$ stable par U. Comme le groupe $\langle\Gamma_{\{i-1,\,i\}}, \Gamma_{\{i,\,i+1\}}\rangle$ est transitif sur l'ensemble des chambres contenant v_i, la proposition 1 impose que $X_{i-1} \neq X_i$. De même, $X_i \neq X_{i+1}$. Donc $X_{i-1} = X_{i+1}$, ce qui contredit la proposition 1 appliquée au groupe $\langle\Gamma_{\{i-1,\,i\}}, \Gamma_{\{i+1,\,i+2\}}\rangle$. En conclusion, si $G = \mathrm{SL}_{l+1}(D)$, *il n'existe pas de groupe Γ ayant les propriétés requises.*

À des détails près, le raisonnement précédent est dû à W. KANTOR qui, avec la collaboration de R. LIEBLER, a montré que des idées analogues s'appliquent dans la plupart des cas (en égale caractéristique).

d) *Bons sous-groupes unipotents et points spéciaux*

Un sous-groupe unipotent de G est dit « bon » s'il est contenu dans un sous-groupe de Borel défini sur une extension séparable de K. Pour la notion de *sommet spécial* (d'un immeuble ou d'un graphe de Dynkin) utilisée ci-après, nous renvoyons à [PSPM], n$^{\mathrm{os}}$ 1.9, 1.10, 2.4 ; dans les tables de *loc. cit.*, les sommets spéciaux des graphes de Dynkin sont ceux marqués s ou hs.

PROPOSITION 2. - *Si, pour un $i \in I$, le sous-groupe unipotent U_i de G est bon, alors $U_i = \{1\}$ et v_i est un sommet spécial de Δ (autrement dit, le sommet d'indice i du graphe de Dynkin affine de G est spécial).*

La première assertion résulte de la proposition 1, car si $U_i \neq \{1\}$, le normalisateur de U_i, donc en particulier Γ_i, est contenu dans un K-sous-groupe parabolique propre de G (cf. *Inventiones Math.* 12 (1971), 95-104, Prop. 3.1). Comme $U_i = \{1\}$, (2) implique que $|\overline{\Gamma}_i|_p = |U|$ et la deuxième assertion résulte de (1), (2) et du lemme général suivant, dont la démonstration est facile.

Lemme 2. - *Si $i \in I$ est tel que $|H_i(k)|_p \geqslant |H_j(k)|_p$ pour tout $j \in I$, alors v_i est un sommet spécial de Δ.*

La proposition 2 a pour conséquence immédiate le

Corollaire 1. - *Le sous-groupe unipotent U de G n'est pas bon.*

Car si U était bon, chaque v_i serait spécial ce qui impliquerait que G est de type A_n intérieur (cf. [PSPM]), et cela est impossible, comme on l'a vu en c).

e) *Applications.* Le corollaire 1 permet d'exclure de nombreux cas. Citons les plus importants.

Le groupe G ne peut être de type A ou C, car dans un groupe simplement connexe de type A ou C, tout sous-groupe unipotent est bon (1).

Supposons G déployé de type D ou E et soit $\mathscr{X}$ le schéma de Chevalley *adjoint* de même type et de même rang que G. Supposons les v_i numérotés de telle façon que v_0 soit un sommet spécial de Δ. Alors, le groupe $\mathscr{X}(k)$ opère sur l'étoile de v_0, on a $\mathscr{X}(k)' \subset \overline{\Gamma}_0 \subset \mathscr{X}(k)$ et $\Gamma_0 \subset \mathscr{X}(\mathbb{O})$, où $\mathbb{O}$ désigne l'anneau des entiers de K. (Le groupe $H_0\,(k)$ de 1.3 est ici $\mathscr{X}(k)$.) Soit $\pi : \Gamma_0 \to \overline{\Gamma}_0$ la projection canonique. Appliquant le théorème de Feit-Tits déjà utilisé en 1.4 à la restriction à $\pi^{-1}(\mathscr{X}(k)')$ d'une représentation projective rationnelle de $\mathscr{X}(K)$ de dimension minimum, on montre que Ker $\pi = \{1\}$, ce qui permet d'inverser π. Faisant usage de résultats connus, dus à E. Cline, B. Parshall et L. Scott, sur la cohomologie d'un groupe de Chevalley à valeurs dans son module adjoint, on prouve alors que $\pi^{-1}(\mathscr{X}(k)')$ est conjugué dans $\mathscr{X}(\mathbb{O})$ à l'image de $\mathscr{X}(k)'$ par l'injection « naturelle » $\iota : \mathscr{X}(k) \to \mathscr{X}(\mathbb{O})$ (image du relèvement $k \to \mathbb{O}$ par le foncteur $\mathscr{X}$). Donc U est conjugué par un élément de $\mathscr{X}(\mathbb{O})$ à l'image de $\pi(U)$ par ι, laquelle est manifestement contenue dans un sous-groupe unipotent K-déployé maximal de G. Il s'ensuit que U est bon, en contradiction avec le corollaire 1.

Ce raisonnement s'étend sans modification importante à tous les groupes G tels que Δ possède un point *hyperspécial* (cf. [PSPM], 1.10, 2.4 et tables), dès que l'on dispose des renseignements cohomologiques nécessaires.

f) *Extension du corps de base.* Voici encore une variante du raisonnement précédent qui peut être utilisée dans des cas où les méthodes décrites plus haut ne sont pas directement applicables.

Supposons $U_0 \neq \{1\}$ (d'après le lemme 2 et les relations (1), (2), c'est le cas si le sommet v_0 de Δ n'est pas spécial). Faisons l'hypothèse que G se déploie

(1) Depuis la rédaction de ce texte, il m'est apparu que, *sur un corps K du type envisagé*, ceci est probablement vrai pour *tout* groupe simplement connexe (je l'ai prouvé dans la plupart des cas). Cela rendrait inutile la suite de ce § 1.

sur une extension finie étale $\widetilde{K}$ de K, soit F une extension quasi-galoisienne finie de $\widetilde{K}$, de corps résiduel f, et soit $\mathbb{O}_F$ l'anneau des entiers de F. L'immeuble Δ se plonge naturellement (par « montée étale » suivie d'une « montée déployée » : cf. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 60 (1984), § 5, et 41 (1972), § 9) dans l'immeuble Δ_F de G sur F. Supposons l'extension F choisie de telle façon que le normalisateur de U_0 dans G soit contenu dans un F-sous-groupe parabolique propre de G et que v_0 soit un sommet spécial de Δ_F. Soit $\mathscr{X}$ le schéma de Chevalley adjoint de même type que G ; identifions $\mathscr{X}(F)$ au groupe des points rationnels sur F du groupe adjoint de G, donc aussi à un sous-groupe de Aut Δ_F, de telle façon que $\mathscr{X}(\mathbb{O}_F)$ soit le stabilisateur de v_0 dans $\mathscr{X}(F)$. Ainsi, $H_0(k)$ se plonge naturellement dans $\mathscr{X}(f)$ et il est facile, dans chaque cas particulier, de déterminer explicitement ce plongement. D'autre part, le raisonnement qui a servi à prouver la proposition 1 montre que $\overline{\Gamma}_0$, et *a fortiori* H_0^0, laisse invariante une facette non vide de l'étoile de v_0 dans Δ_F, donc que H_0^0 est contenu dans un sous-groupe parabolique propre de $\mathscr{X}(f)$. Quelquefois, par exemple lorsque G est de type ${}^2E_7$ (cf. [PSPM], p. 66), cela fournit la contradiction cherchée.

2. *Un théorème « positif » : immeubles et amalgames*

2.1. Il a été dit plus haut que les cas d'exception du théorème 1 sont, pour la plupart, des phénomènes remarquables qui méritent d'être étudiés. Mais il convient avant tout d'en montrer l'existence. Pour les cas traités dans la littérature, cela a été fait (par W. KANTOR, P. KÖHLER, Th. MEIXNER et M. WESTER) à l'aide de constructions *ad hoc*, toutes différentes entre elles. Dans le cours, on a proposé une méthode applicable *en principe* à tous les cas et même, plus généralement, à la description de tout groupe Γ d'automorphismes d'un immeuble Δ quelconque (non nécessairement affine ou localement fini) permutant transitivement les chambres de Δ. Cette méthode consiste à définir Γ comme la somme amalgamée de certains sous-groupes, et à construire Δ à partir de Γ et des sous-groupes en question. Lorsqu'on définit un groupe par générateurs et relations, un problème majeur est généralement celui de montrer que le groupe ainsi défini ne « dégénère » pas (par exemple, qu'il n'est pas réduit à l'élément neutre). Dans le cas présent, ce résultat est fourni par le théorème 2 ci-dessous, qui généralise le théorème classique (et facile) sur la structure des sommes de deux groupes, amalgamés suivant un sous-groupe « commun ».

2.2. Rappelons qu'un *système de chambres* $(\mathscr{C}, (\mathscr{P}_i | i \in I))$ au-dessus d'un ensemble I est, par définition, un ensemble $\mathscr{C}$ doté d'un système de partitions $\mathscr{P}_i$, indexé par I. Les éléments de $\mathscr{C}$ sont les *chambres* et deux chambres appartenant à la même classe de $\mathscr{P}_i$ sont dites i*-adjacentes*. L'ensemble des chambres d'un immeuble Δ forment un système de chambres lorsqu'on déclare i-adjacentes deux chambres ayant une cloison commune, de type $I - \{i\}$. Ce système de chambres détermine Δ à isomorphisme unique près, ce qui rend légitime l'abus de langage consistant à appeler aussi *immeuble* le système de chambres en question. Soient Γ un groupe, B un sous-groupe et P_i, pour $i \in I$, des sous-groupes de Γ contenant B ; nous notons alors $\mathcal{C}(\Gamma\,;\,B\,;\,(P_i|i \in I))$ le système de chambres $(\Gamma/B\,;\,(\mathcal{P}_i|i \in I))$ où $\mathcal{P}_i$ est formée des images réciproques des points de Γ/P_i par l'application canonique $\Gamma/B \to \Gamma/P_i$.

2.3. Soient $\mathcal{X}$ un ensemble de groupes et Φ un ensemble d'homomorphismes de groupes dont la source et le but appartiennent à $\mathcal{X}$. On appelle *limite inductive* du système $(\mathcal{X}, \Phi)$, ou de $\mathcal{X}$ relativement à Φ, un groupe Γ doté d'un système d'homomorphismes $\psi_X : X \to \Gamma$, pour $X \in \mathcal{X}$, tels que pour tout élément $\varphi : X \to Y$ de Φ, on ait $\psi_X = \psi_Y \circ \varphi$, le système $(\Gamma, (\psi_X))$ étant « universel » pour ces propriétés, en un sens évident. Supposons que Φ soit fermé pour les compositions d'homomorphismes (c'est-à-dire que $\varphi, \varphi' \in \Phi$ implique $\varphi' \circ \varphi \in \Phi$ lorsque la source de φ' coïncide avec le but de φ : hypothèse de commodité qui ne restreint d'ailleurs pas la généralité) et soit $\mathcal{Y}$ une partie de $\mathcal{X}$ telle que tout élément de $\mathcal{X} - \mathcal{Y}$ soit la source d'un élément de Φ dont le but appartient à $\mathcal{Y}$. Dans ce cas, nous dirons aussi, par abus de langage, que Γ est la *somme amalgamée* de $\mathcal{Y}$, ou des éléments de $\mathcal{Y}$, relativement à Φ, ou encore que Γ est la somme amalgamée du système $(\mathcal{Y}, \Phi)$.

Soient $M = (m_{i,j}|i, j \in I)$ une matrice de Coxeter, Δ un immeuble de type M, Γ un groupe d'automorphisme de Δ permutant les chambres transitivement, C une chambre de Δ et P_J, pour $J \in I$, le stabilisateur dans Γ de la facette de type $I - J$ de C. La proposition suivante est facile ; son but est avant tout de motiver ce qui suit.

Proposition 3. - (i) *Le système de chambres de l'immeuble Δ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{C}(\Gamma\,;\,P_\emptyset\,;\,(P_i|i \in I))$.*

(ii) *Le groupe Γ est somme amalgamée de ses sous-groupes $P_\emptyset$, P_i pour $i \in I$, et $P_{\{i,j\}}$ pour $i, j \in I$ tels que $m_{ij} \neq \infty$, relativement aux inclusions.*

Lorsque tous les m_{ij} sont finis, on peut dire, plus simplement, que Γ est la somme amalgamée des $P_{\{i,j\}}$.

2.4. Soit M comme ci-dessus. Pour $J \subset I$, nous notons M_J le mineur principal $(m_{ij}|i, j \in J)$ de M et nous disons que J est *sphérique* si le groupe de Coxeter de type M_J est fini. Donnons-nous pour toute partie sphérique $J \subset I$ de cardinal $\leqslant 3$ un groupe P_J et pour tout couple (J, J') de telles parties, avec $J' \subset J$, un homomorphisme injectif $\varphi_{J'J} : P_{J'} \to P_J$. Nous supposons que pour $J'' \subset J' \subset J$ (avec J sphérique de cardinal $\leqslant 3$) on ait $\varphi_{J''J} = \varphi_{J'J} \circ \varphi_{J''J'}$ et il nous arrivera d'identifier $P_{J'}$ avec son image par $\varphi_{J'J}$. Pour toute partie K de I, notons Γ_K la somme amalgamée du système $(P_J, \varphi_{J'J}|J' \subset J \subset K)$. Posons $B = P_\emptyset$ et $\Gamma = \Gamma_I$.

THÉORÈME 2. - *Supposons que pour tout $J \subset I$ sphérique et de cardinal $\leqslant 3$ le système de chambres $\mathscr{C}$ $(P_J\ ;\ B\ ;\ (P_j | j \in J))$ soit un immeuble de type M_J. Alors, $\mathscr{C}$* $(\Gamma\ ;\ B\ ;\ (\mathrm{P_i} | \mathrm{i} \in \mathrm{I}))$ est un immeuble de type M et l'homomorphisme canonique $\Gamma_{\mathrm{K}} \to \Gamma_{\mathrm{I}}$ est injectif quel que soit $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$.

(Notons que, pour K sphérique de cardinal $\leqslant 3$, Γ_K s'identifie à P_K par la proposition 3.)

Si $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{smallmatrix}\right)$, l'hypothèse de l'énoncé est vide, l'immeuble de type M est un arbre et l'on retrouve le théorème sur les sommes amalgamées ordinaires, évoqué à la fin du n° 2.1.

2.5. La preuve du théorème 2 combine l'utilisation de deux concepts différents, et classiques, de « mots réduits » : celui qui intervient dans l'étude des sommes amalgamées ordinaires et celui de la théorie des groupes de Coxeter. Pour rendre cette assertion plus concrète, donnons les définitions de base et énonçons deux lemmes qui constituent les étapes principales de la démonstration.

Soit $(W,\ (r_i | i \in I))$ un système de Coxeter de type M. Disons qu'un mot $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_q) \in I^q$ est M-réduit si $(r_{i_1}, \ldots, r_{i_q})$ est un mot réduit pour ce système de Coxeter. Appelons *mot de type* $\mathbf{i}$ toute suite $(p_1, \ldots, p_q, b)$ où $p_s \in P_{i_s} - B$ et $b \in B$. Nous définissons une *équivalence élémentaire* (de mots) comme l'opération consistant à substituer à un segment (p_s, p_{s+1}) d'un mot un segment de la forme $(p_s b', b'^{-1} p_{s+1})$ avec $b' \in B$ ($\subset P_i$ pour tout i, selon une convention faite plus haut) ; ici, l'on n'exclut pas le cas où p_{s+1} est le dernier terme du mot donné (i.e. $p_{s+1} \in B$). De même, une *homotopie élémentaire* consiste à remplacer un segment $(p_s, p_{s+1}, \ldots)$ de longueur m_{ij} (que l'on suppose évidemment fini) et de type $(i, j, i, \ldots)$ par un segment $(p'_s, p'_{s+1}, \ldots)$ de même longueur, de type $(j, i, j, \ldots)$ et tel que l'on ait $p'_s\, p'_{s+1}\, p'_{s+2} \ldots = p_s\, p_{s+1}\, p_{s+2} \ldots$ *dans le groupe* $P_{\{i,j\}}$. Une *équivalence* (resp. une *homotopie*) est définie comme le résultat d'une succession d'équivalences élémentaires (resp. d'équivalences élémentaires et d'homotopies élémentaires).

LEMME 3. - *Deux mots homotopes de même type M-réduit sont équivalents.*

Appelons $\mathscr{G}$ l'ensemble des classes d'homotopie de mots de type M-réduits et notons $[p_1, \ldots, p_q, b]$ la classe d'homotopie du mot $(p_1, \ldots, p_q, b)$.

LEMME 4. - *Il existe des opérations à droite des groupes B, P_i et $P_{\{i,j\}}$ (pour $m_{i,j} \neq \infty$) sur $\mathscr{G}$ compatibles avec les inclusions données $B \to P_i \to P_{\{i,j\}}$ et telles que l'on ait $[p_1, \ldots, p_q, b] = [p_1, \ldots, p_q, 1] \cdot b$ et $[p_1, \ldots, p_q, 1] = [p_1, \ldots, p_{q-1}, 1] \cdot p_q$.*

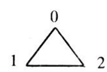
Ces lemmes entraînent que l'ensemble $\mathscr{G}$ est un espace homogène principal du groupe Γ, et l'on en déduit facilement le théorème 2 en faisant usage d'une caractérisation des immeubles donnée dans le cours de l'an dernier (théorème 1, p. 86 de l'*Annuaire du Collège de France* 1983-1984). Nous ne dirons rien ici de la preuve, assez longue et technique, des lemmes 3 et 4.

3. *Exemples*

3.1. *Immeubles de type* $\widetilde{A}_2$ (*corps résiduel* $\mathbf{F}_2$)

Les résultats résumés dans ce numéro et le suivant ont été inspirés par les travaux de P. Köhler, Th. Meixner et M. Wester et sont en partie dus à ces auteurs, désignés ci-après par leurs initiales KMW.

a) On note Fr_{21} (« groupe de Frobenius d'ordre 21 ») le produit semi-direct et non direct de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. On vérifie facilement que si X_0, X_1 désignent deux sous-groupes d'ordre 3 de Fr_{21}, distincts l'un de l'autre, le système de chambres $\mathscr{C}$ (Fr_{21} ; $\{1\}$; X_0, X_1) est l'immeuble sphérique de PGL_3 ($\mathbf{F}_2$), c'est-à-dire le complexe des drapeaux d'un plan projectif sur le corps $\mathbf{F}_2$. Soient maintenant $P_{\{0,1\}}$, $P_{\{1,2\}}$ et $P_{\{2,0\}}$ trois copies de Fr_{21} et soient P^j_i et P^i_j deux sous-groupes d'ordre 3 de $P_{\{i,j\}}$, distincts l'un de l'autre. Pour chaque valeur de i, « amalgamons » les deux groupes P^j_i et P^k_i, pour $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, soient Γ la somme amalgamée ainsi obtenue et P_i le sous-groupe de Γ résultant de l'identification de P^j_i et P^k_i. Il résulte du théorème 2 que P_i est d'ordre 3 et que $\Delta = \mathscr{C}\,(\Gamma\ ;\ \{1\}\ ;\ (P_i | i = 0, 1, 2))$ est un immeuble de type

$\widetilde{A}_2 =$ 

Cependant, dans la description qui précède, le mot « amalgamer » est ambigu : on peut identifier l'élément de P^j_i qui multiplie le 7-cycle de $P_{\{i,j\}}$ par 2 avec l'élément de P^k_i qui multiplie le 7-cycle de $P_{\{i,k\}}$ par 2, ou avec son inverse ; dans le premier cas, nous dirons que l'indice i est *polarisé*. Il y a donc, à isomorphisme près, quatre façons d'amalgamer les groupes $P_{\{i,j\}}$, donc quatre groupes Γ et quatre immeubles Δ, que nous dirons *de type* 0, I, II *ou* III selon le nombre d'indices polarisés, et que nous noterons Γ_0, Γ_1, ... et Δ_0, Δ_1, ... (L'existence de quatre façons d'amalgamer trois copies de Fr_{21} suivant des sous-groupes d'ordre 3 a été remarquée d'abord par M. Ronan.) Pour chacun des quatre immeubles Δ_0, Δ_1, ..., la question se pose : est-ce l'immeuble d'un groupe de type relatif A_2 sur un corps local K à corps résiduel $\mathbf{F}_2$ et, si oui, le groupe Γ correspondant est-il arithmétique ? Si car $K = 0$, on sait *a priori,* par le théorème d'arithméticité de Margulis, que la réponse à la seconde question est positive, mais lorsque Γ est arithmétique, on souhaite en outre l'identifier concrètement.

Avant de donner la réponse à ces questions, nous allons voir qu'il est possible de la « deviner » par une *étude locale* des immeubles considérés.

b) Soit Δ un immeuble de type $\widetilde{A}_2$. Si v est un sommet de Δ, notons $\Delta_v^{(2)}$ la « sphère de centre v et de rayon 2 » dans Δ, c'est-à-dire le sous-complexe ayant pour sommets les sommets de Δ dont la distance à v dans le graphe des sommets et des arêtes de Δ est $\leqslant 2$. Soient $\mathscr{C}_1$ l'ensemble des chambres de Δ

contenant v, $\mathscr{C}_2$ l'ensemble des chambres adjacentes à des éléments de $\mathscr{C}_1$ mais n'appartenant pas à $\mathscr{C}_1$ et $\alpha : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_1$ l'application d'adjacence (pour $X \in \mathscr{C}_2$, $\alpha(X)$ est l'unique élément de $\mathscr{C}_1$ adjacent à X). Soit k un « ensemble de référence » de même cardinal que les fibres de α (qui sont équipotentes). Appelons *système de coordonnées* un système de bijections $f_X : k \to \alpha^{-1}(X)$ pour $X \in \mathscr{C}_1$. Un tel système étant choisi, chaque paire $\{X, Y\} \subset \mathscr{C}_1$ de chambres adjacentes détermine une bijection $\beta_{X,Y} : k \to k$ définie par la propriété suivante : pour $x \in k$, $f_Y(\beta_{X,Y}(x))$ est l'unique élément de $\alpha^{-1}(Y)$ à distance 2 de $f_X(x)$ dans le graphe dont les sommets sont les chambres de Δ et les arêtes les paires de chambres adjacentes. Le lemme suivant est immédiat.

LEMME 5. *Le complexe $\Delta_v^{(2)}$ est déterminé à isomorphisme près par le système de chambres $\mathscr{C}_1$ et le système de fonctions $\beta_{X,Y}$ attachées aux paires $\{X,Y\}$ d'éléments de $\mathscr{C}_1$ adjacents.*

Il est facile de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de fonctions $(\beta_{X,Y})$ détermine effectivement une sphère de rayon 2 dans un immeuble de type $\widetilde{A}_2$. La condition d'isomorphisme des sphères définies par deux systèmes de fonctions $(\beta_{X,Y})$, $(\beta'_{X,Y})$ est, elle, beaucoup moins agréable à formuler. Cependant, lorsque card $k = 2$, ce qui permet de poser $k = \mathbf{F}_2$, chaque fonction $\beta_{X,Y}$ peut s'écrire $x \mapsto b_{X,Y} + x$, avec $b_{X,Y} \in k$, et l'on a établi dans le cours le critère d'isomorphisme suivant :

PROPOSITION 4. - *La somme $b = \Sigma\, b_{X,Y}$ étendue à toutes les paires $\{X, Y\}$ ne dépend pas du système de coordonnées choisi et est donc un invariant de la classe d'isomorphie de $\Delta_v^{(2)}$. Elle détermine cette classe.*

Ainsi, pour les immeubles de type $\widetilde{A}_2$ tels que chaque arête appartienne à trois chambres, les sphères de rayon 2 n'ont que deux structures possibles. Notons b_v le nombre b de la proposition 4 ; dans les cas qui nous intéressent, il se calcule facilement :

PROPOSITION 5. - (i) *Si Δ est l'immeuble $\mathscr{C}(\Gamma\ ;\ \{1\}\ ;\ (P_i))$ défini en a), on a $b_v = 0$ ou 1 selon que l'indice $i \in \{0, 1, 2\}$ correspondant au sommet v est ou non polarisé.*

(ii) *Si Δ est l'immeuble affine de $\mathrm{SL}_3\,(K)$ pour un corps K local de corps résiduel $\mathbf{F}_2$, on a $b_v = 1$ ou 0 selon que K est ou non isomorphe à $\mathbf{Q}_2$.*

COROLLAIRE 2. - *Les immeubles $\Delta_0, \ldots, \Delta_{\mathrm{III}}$ sont deux à deux non isomorphes ; Δ_{I} et Δ_{II} ne sont pas les immeubles affines de groupes algébriques sur des corps locaux.*

Les méthodes de G. MARGULIS devraient permettre de déduire de ce dernier résultat que les groupes Γ_{I} et Γ_{II} ne sont pas arithmétiques.

c) *Le type* III. L'immeuble Δ_{III} est, comme on peut s'y attendre, l'immeuble affine de $\mathrm{SL}_3\,(\mathbf{Q}_2)$. Cela a été prouvé par KMW (*J. Comb. Theory* A38 (1985), 203-209), qui ont en outre identifié le groupe Γ_{III} comme le groupe arithmétique $\mathrm{SU}_3\left(h,\, \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}, \sqrt{-7}\right]\right)$ où, si l'on note λ une racine de l'équation $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, les coefficients de la matrice hermitienne $h = (h_{ij} | i, j \in \{1, 2, 3\})$ sont $h_{ij} = \lambda/3, 1$ ou $\bar{\lambda}/3$ selon que $i - j$ est < 0, $= 0$ ou > 0. Le groupe $\mathrm{U}_3\left(h,\, \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}, \sqrt{-7}\right]\right)$ est produit semi-direct de Γ_{III} et du groupe cyclique $\langle(0, 1, 2)\rangle$ opérant sur Γ_{III} de façon évidente.

d) *Le type* 0. Les mêmes auteurs ont montré (*Arch. Math.* 42 (1984), 400-407) que Δ_0 est l'immeuble affine de $\mathrm{SL}_3\,(\mathbf{F}_2((t)))$ et explicité l'injection de Γ_0 dans ce groupe à l'aide de matrices génératrices. Mais on peut aussi, comme cela a été vu dans le cours, donner de Γ_0 la description plus conceptuelle suivante, qui le fait apparaître comme un groupe arithmétique. Posons $K = \mathbf{F}_2\,(t)$, $L = \mathbf{F}_8\,(t)$, $\hat{K} = \mathbf{F}_2\,((t))$, soit σ l'automorphisme de L qui fixe t et induit sur $\mathbf{F}_8$ l'automorphisme de Frobenius, et soit D l'algèbre à division cyclique de centre K engendrée par L et par un élément σ' tel que $\sigma' x \sigma'^{-1} = \sigma\,(x)$ pour tout $x \in L$ et $\sigma'^3 = t + 1$. Soit ϵ un générateur du groupe multiplicatif de $\mathbf{F}_8$ tel que $\epsilon^3 = \epsilon + 1$. Posant $\tau = \epsilon^5 \sigma'\,(\sigma' + 1)$, on vérifie que $\tau^3 = t\,(t + 1)$ et ${}^{\tau}\sigma' = \sigma'\epsilon$. Désignons par $\bar{\sigma}'$, $\bar{\epsilon}$, $\bar{\tau}$ les images canoniques de σ', ϵ, τ dans $D^{\times}/K^{\times}$. On a donc $\bar{\sigma}'^3 = \bar{\tau}^3 = 1$, et l'on voit que $\langle\bar{\sigma}', \bar{\epsilon}\rangle \cong \mathrm{Fr}_{21}$ et que, dans le groupe Γ engendré par $\bar{\sigma}'$, $\bar{\tau}$ et $\bar{\epsilon}$, les trois sous-groupes de Frobenius $X_{\{0,1\}} = \langle\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}\rangle = \langle\bar{\sigma}', {}^{\bar{\tau}}\bar{\sigma}'\rangle$, $X_{\{1,2\}} = {}^{\bar{\tau}}X_{\{0,1\}}$ et $\mathrm{X}_{\{2,0\}} = {}^{\bar{\tau}}\mathrm{X}_{\{1,2\}}$ s'amalgament de la même façon que les $P_{\{i,j\}}$ dans le groupe Γ_0, d'où un homomorphisme $\varphi : \Gamma_0 \to \Gamma$ tel que $\varphi(P_{\{i,j\}}) = X_{\{i,j\}}$. Si l'on fait opérer Γ sur l'immeuble affine Δ de $\mathrm{PGL}_3\,(\hat{K})$ via l'injection naturelle $D^{\times}/K^{\times} \to (D \otimes \hat{K})^{\times}/\hat{K}^{\times} = \mathrm{PGL}_3\,(\hat{\mathrm{K}})$, on trouve que les $X_{\{i,j\}}$ stabilisent les sommets d'une chambre de Δ. Compte tenu de la proposition 3 (ii) et de la conclusion du n° 1.5 c), on en déduit aussitôt que φ est injectif et que

(3) $\quad \varphi(\Gamma_0)$ est un sous-groupe discret maximal de $\mathrm{PSL}_3\,(\hat{K})$.

Soit maintenant $\Lambda \subset D$ l'ordre sur $A = \mathbf{F}_2\,[t, t^{-1}, (t + 1)^{-1}]$ engendré par σ' et ϵ. Le groupe arithmétique :

$$\mathrm{PGL}\,(\Lambda)\,(A) = \{d \in D^{\times} | d\,\Lambda\, d^{-1} = \Lambda\}/K^{\times} \subset D^{\times}/K^{\times}$$

s'injecte dans $\mathrm{PGL}_3\,(\hat{K})$, donc opère sur Δ, sans toutefois préserver le type des sommets. Comme $\bar{\tau}$ permute cycliquement les trois types, on déduit de (3) que $\mathrm{PGL}\,(\Lambda)\,(A) = \langle\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}, \bar{\tau}\rangle \cong \Gamma_0 \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Remarques. - Il n'est pas toujours commode de trouver des systèmes générateurs explicites de groupes arithmétiques donnés ; on vient de voir que la théorie des immeubles peut parfois y aider.

— si $p \in \mathbf{F}_2[t]$ est un polynome irréductible de degré $n \geqslant 2$, le théorème d'approximation forte de G. PRASAD implique que l'homomorphisme de réduction mod p de SL (Λ) (A) dans $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_q)$ avec $q = p^n$ est surjectif. On en déduit que l'image par réduction mod p du groupe PGL (Λ) $(A) = \langle \bar{\sigma}, \bar{\epsilon}, \bar{\tau} \rangle$ (resp. du sous-groupe d'indice 3 engendré par $\bar{\sigma}$, et ses conjugués par $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}^2$) est $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{F}_q)$ si et seulement si t et $t + 1$ sont des cubes mod p (resp. si $t + 1$ est un cube mod p), et que cette image est $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{F}_q)$ dans les autres cas. Cela éclaire certains résultats du deuxième article de KMW cité plus haut.

3.2. *Immeubles de type* $\widetilde{\mathrm{A}}_2$ *(corps résiduel* $\mathbf{F}_8$*)*

a) On note $\mathrm{Fr}_{73.9}$ le produit semi-direct $\mathbf{Z}/73\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$, où un générateur de $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ opère sur $\mathbf{Z}/73\mathbf{Z}$ par la multiplication par 2. Si X_0, X_1 désignent deux sous-groupes d'ordre 9 de $\mathrm{Fr}_{73.9}$, distincts l'un de l'autre, le système de chambres $\mathscr{C}(\mathrm{Fr}_{73.9}\ ;\ \{1\}\ ;\ X_0, X_1)$ est l'immeuble sphérique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{F}_8)$. Cela se voit en considérant le corps $\mathbf{F}_{512}$ comme espace vectoriel sur $\mathbf{F}_8$ et en remarquant que le groupe d'automorphismes du plan projectif $\mathbf{P}(\mathbf{F}_{512}) = \mathbf{P}_2(\mathbf{F}_8)$ induit par $\mathbf{F}^{\times}_{512} \times \mathrm{Aut}\,(\mathbf{F}_{512})$ est isomorphe à $\mathrm{Fr}_{73.9}$ et simplement transitif sur les drapeaux du plan.

b) En procédant exactement comme en 3.1 a), mais avec $P_{\{i,\,j\}} \cong \mathrm{Fr}_{73.9}$ et $P_i^j \cong \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ (et toujours $i, j \in \{0, 1, 2\}$), on obtient un groupe Γ, somme amalgamée des $P_{\{i,\,j\}}$, et un immeuble $\Delta = \mathscr{C}(G\ ;\ \{1\}\ ;\ (P_i))$ de type $\widetilde{\mathrm{A}}_2$. Cette fois, on montre que pour caractériser l'amalgame considéré, il faut se donner six éléments a_i^j de $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^{\times} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ soumis à la condition $a_i^j \cdot a_j^i = 1$. Cela donne 44 classes d'isomorphisme d'amalgames possibles, donc 44 groupes et 44 immeubles *a priori* non isomorphes.

c) Disons qu'un immeuble Δ de type $\widetilde{\mathrm{A}}_2$ dont les étoiles de sommets sont isomorphes au complexe $\mathrm{Dr}_2(k)$ des drapeaux du plan projectif $\mathbf{P}_2(k)$ sur un corps commutatif k est *cohérent* (resp. *semi-cohérent*) s'il existe un système d'isomorphismes φ_x : Ét $x \to \mathrm{Dr}_2(k)$ des étoiles des sommets de Δ sur $\mathrm{Dr}_2(k)$ tel que, pour toute arête (x, y) de Δ, les restrictions de φ_x et φ_y à l'étoile de (x, y) ne diffèrent que par une transformation linéaire (resp. semi-linéaire) de $\mathbf{P}_2(k)$. La vérification des assertions suivantes est un exercice :

— l'immeuble Δ défini en b) est semi-cohérent si et seulement si tous les a_i^j sont égaux à 1, 4 ou 7 et cohérent si, de plus, $a_0^1\, a_1^2\, a_2^0 = 1$;

— si D est une algèbre à division locale à corps résiduel k fini, l'immeuble affine de $\mathrm{SL}_3(D)$ est semi-cohérent ; il est cohérent si et seulement si D est un corps commutatif.

d) La considération des « sphères de rayon 2 » permet, comme en 3.1 b) mais de façon plus compliquée (cela n'a pas été fait dans le cours), de montrer que le système des a_i^j est un invariant non seulement de l'amalgame considéré mais de l'immeuble Δ qui en résulte (immeuble dont les types de sommets sont indexés par 0, 1, 2). On en déduit que si Δ est isomorphe à l'immeuble de $SL_3(D)$ pour une algèbre à division D de corps résiduel $\mathbf{F}_8$, le système des a_i^j est invariant par une permutation cyclique des indices 0, 1, 2, donc, vu b), qu'on a dans ce cas $a_0^1 = a_1^2 = a_2^0 = 1$, 4 ou 7. Mais alors, toujours en vertu de b), Δ est cohérent, donc D est commutatif et *toute* permutation de 0, 1, 2 laisse invariant le système des a_i^j. En conclusion, si Δ *est l'immeuble affine d'un groupe* $SL_3(D)$, *D est commutatif et* $a_i^j = 1$ *pour tous i, j.*

J'ignore si l'immeuble correspondant aux valeurs $a_i^j = 1$ est effectivement l'immeuble affine d'un groupe $SL_3(K)$ [(1)]. Dans le cours, on s'est borné à déduire des considérations développées en 3.1 b) une estimation grossière du nombre de classes d'isomorphie de sphères de rayon 2 d'immeubles de type $\widetilde{A}_2$ tels que les étoiles des sommets soient isomorphes à $\mathrm{Dr}_2(\mathbf{F}_8)$; on a trouvé que ce nombre, qui était égal à 2 dans la situation étudiée en 3.1, est cette fois supérieur à 10^{652}.

3.3. *Immeuble de type* $\widetilde{A}_3$ (corps résiduel $\mathbf{F}_2$)

a) Soient E un ensemble de 7 points et $\mathfrak{A}(E) \cong \mathfrak{A}_7$ le groupe des permutations paires de E. Ce groupe a deux orbites dans l'ensemble des structures de plan projectif (isomorphe à $\mathbf{P}_2(\mathbf{F}_2)$) sur E ; notons-les $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_2$ et désignons par $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des triples d'éléments de E. Disons qu'un tel triple est incident à une structure de plan projectif ($\in \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_2$) s'il en est une droite, et qu'un élément de $\mathcal{P}_0$ et un élément de $\mathcal{P}_2$ sont incidents s'ils ont une droite en commun, auquel cas ils en ont exactement trois (qui sont concourantes). On montre facilement que le système $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ doté des relations d'incidence ainsi définies est isomorphe à la géométrie des points, droites et plans d'un espace projectif $\mathbf{P}_3(\mathbf{F}_2)$. On en déduit une action de $\mathfrak{A}_7$ sur $\mathbf{P}_3(\mathbf{F}_2)$ qui est transitive sur les drapeaux (maximaux) ; c'est l'une des exceptions du théorème de D. Higman cité en 1.2.

b) Soit (v_0, v_1, v_2), avec $v_i \in \mathcal{P}_i$, un drapeau de la géométrie $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, et, pour toute partie J de $I = \{0, 1, 2\}$, soit P_J le sous-groupe de $\mathfrak{A}(E)$ fixateur de $\{v_j | j \in J\}$. Posons $B = P_\emptyset$. Il résulte de la proposition 3 que $\mathfrak{A}(E)$ est somme amalgamée de ses sous-groupes $P_{\{0,1\}}$, $P_{\{1,2\}}$, $P_{\{2,0\}}$, et que $\mathscr{C}(\mathfrak{A}(E)\,;\, B\,;\, P_0, P_1, P_2)$ est l'immeuble de $PGL_4(\mathbf{F}_2)$, c'est-à-dire le complexe des drapeaux de $\mathbf{P}_3(\mathbf{F}_2)$.

c) Pour l'application que l'on a en vue, il est nécessaire d'avoir une description « abstraite » du système de groupes $(B\,;\,(P_i)\,;\,(P_{\{i,j\}}))$ et des inclusions $B \to P_i$, $P_i \to P_{\{i,j\}}$. Les propriétés suivantes résultent immédiatement des définitions :

(1) (Note ajoutée aux épreuves.) La réponse est affirmative et l'on a $K = \mathbf{F}_8((t))$: cela m'a été signalé tout récemment par Th. MEIXNER.

(A0) les inclusions sont *compatibles,* c'est-à-dire que les applications composées $B \to P_i \to P_{\{i,j\}}$ et $B \to P_j \to P_{\{i,j\}}$ coïncident quels que soient $i, j \in I$;

(A1) le groupe B est diédral d'ordre 8 ;

(A2) les groupes P_i sont isomorphes au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$;

(A3) les groupes $P_{\{0,1\}}$ et $P_{\{1,2\}}$ sont isomorphes à $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{F}_2)$ tandis que $P_{\{0,2\}}$ est isomorphe à l'unique sous-groupe d'indice deux Q du produit $\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_3$ qui ne contient aucun des facteurs.

On sait ce qu'est un sous-groupe parabolique de $\mathrm{PGL}_3(\mathbf{F}_2)$. Appelons sous-groupes paraboliques maximaux de Q les graphes d'homomorphismes surjectifs $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$; il y en a six, se répartissant en deux classes de conjugaison. Cela étant :

(A4) pour $i \neq j$, P_i et P_j sont des sous-groupes paraboliques maximaux non conjugués de $P_{\{i,j\}}$.

Considérons un système $(B\,;(P_i)\,;(P_{\{i,j\}}))$ (doté d'injections $B \to P_i$, etc.) possédant les propriétés (A0) à (A4). Il existe un unique isomorphisme $P_{\{0,1\}} \to P_{\{1,2\}}$ fixant P_1 et appliquant P_0 sur P_2 ; il induit un isomorphisme $\alpha_1 : P_0 \to P_2$. D'autre part, dans $P_{\{0,2\}}$, il existe un unique isomorphisme $\alpha_{02} : P_0 \to P_2$ qui est l'identité modulo l'unique sous-groupe distingué d'ordre trois de $P_{\{0,2\}}$. La preuve du lemme suivant est un simple exercice.

LEMME 6. - *Il existe exactement deux classes d'isomorphismes de systèmes* $(B\,;(P_i)\,;(P_{\{i,j\}}))$ *satisfaisant aux conditions* (A0) *à* (A4) ; *la classe du système décrit en* b) (*et dont la somme amalgamée est donc* $\mathfrak{A}_7$) *se distingue de l'autre par la relation.*

(A5) $$\alpha_1 \neq \alpha_{02}\ .$$

d) Laissons maintenant les indices i, j parcourir le groupe cyclique $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ et considérons les conditions (A0′) à (A5′) déduites de (A0), ..., (A5) par l'extension évidente :

(A0′), (A1′), (A2′), (A4′) ont même formulation que (A0), (A1), (A2), (A4) à ceci près que $i, j \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$;

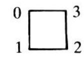
(A3′) $P_{\{i,i+1\}} \cong \mathrm{PGL}_3(\mathbf{F}_2)$ et $P_{\{i,i+2\}} \cong Q$;

(A5′) $\alpha_i \neq \alpha_{i-1,i+1}$,

où la définition des isomorphismes α_i et $\alpha_{i-1,i+1}$ de P_{i-1} sur P_{i+1} est identique à celle de α_1 et α_{02}. La proposition suivante, dont la démonstration ne présente guère de difficulté, était l'objet de cette partie du cours.

PROPOSITION 6. - *Il existe un et, à isomorphisme près, un seul système de groupes* B, P_i, $P_{\{i,j\}}$ *et d'injections* $B \to P_i$, $P_i \to P_{\{i,j\}}$, *avec* $i, j \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, *satisfaisant aux conditions* (A0′) *à* (A5′).

Si l'on désigne alors par Γ la somme amalgamée de ce système, le théorème 2 implique que les $P_{\{i,\,j\}}$ s'injectent dans Γ et que le système de chambres $\mathscr{C}\,(\Gamma\,;\,B\,;\,(P_i))$ est un immeuble de type

$\widetilde{A}_3 =$ 

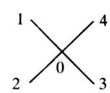
De plus, Γ est un groupe discret d'automorphismes de cet immeuble, transitif sur les chambres. Le théorème de classification des immeubles de type affine, prouvé dans le cours de l'an dernier [(2)], implique que Δ est l'immeuble affine d'un groupe $PGL_4\,(K)$, où K est un corps local de corps résiduel $\mathbf{F}_2$; si car $K = 0$, on sait en outre, par le théorème de Margulis, que Γ est arithmétique.

e) W. Kantor a montré par des calculs directs que, si q désigne la forme quadratique $\sum_{i=1}^{7} x_i^2$, le groupe arithmétique $SO\left(q,\, \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right)'$ permute transitivement les chambres de l'immeuble affine de $SO\,(q,\, \mathbf{Q}_2)$. Les raisonnements (esquissés au § 1) qui conduisent au théorème 1 et l'assertion d'unicité de la proposition 6 impliquent que ce groupe arithmétique et cet immeuble ne peuvent être que le groupe Γ et l'immeuble Δ de d).

3.4. *Immeuble de type* $\widetilde{D}_4$ *(corps résiduel* $\mathbf{F}_2$*)*

L'exception $D_4\,(\mathbf{Q}_2)$ du théorème 1 est la plus remarquable.

Sa découverte par W. Kantor (*J. of Algebra,* 92 (1985), 208-223) est à l'origine des recherches exposées dans ce cours. On a affaire ici à un immeuble Δ de type

$\widetilde{D}_4 =$ 

Comme précédemment, cet immeuble et le groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{Aut}\,\Delta$ permutant les chambres transitivement peuvent être construits à partir de groupes finis B, P_i, $P_{\{i,\,j\}}$ par amalgamation : B est isomorphe aux sous-groupes de Borel de $D_4\,(\mathbf{F}_2)$, les P_i sont isomorphes à des sous-groupes paraboliques de rang 1 de $D_4\,(\mathbf{F}_2)$ (correspondant au sommet central ou à l'une des extrémités du diagramme de Dynkin de D_4 selon que $i =$ ou $\neq 0$) et les $P_{\{i,\,j\}}$ sont isomorphes à des sous-groupes paraboliques de rang 2 de $D_4\,(\mathbf{F}_2)$. Tout le

(2) Cette référence me donne l'occasion d'apporter une correction au résumé du cours de 1983-1984. La proposition 7 de ce résumé (p. 95 de l'Annuaire) affirme plus que ce qui avait été établi dans le cours ; on conjecture que, telle qu'elle est énoncée là, cette proposition est effectivement correcte, mais cela n'a pas été prouvé jusqu'ici à ma connaissance.

problème consiste à décrire les injections $B \to P_i \to P_{\{i,\,j\}}$, ce qui se fait par des formules explicites, à l'intérieur du groupe $\mathrm{D}_4\,(\mathbf{F}_2)$.

Dans le cours, on a préféré reprendre la description originale de KANTOR, qui donne des informations plus précises sur la situation étudiée. Soit $(u_i | 1 \leqslant i \leqslant 8)$ une base orthonormale de $\mathbf{Q}^8$, doté de la forme quadratique q standard (somme des carrés), et soit $(v_i | 1 \leqslant i \leqslant 8)$ la base orthogonale définie par $v_{2j-1} = u_{2j-1} + u_{2j}$, $v_{2j} = u_{2j-1} - u_{2j}$. Les quatre ensembles

$$\{\pm\, u_i \pm \mathrm{u}_j\} \cup \left\{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} \epsilon_i u_i \,\middle|\, \epsilon_i = \pm\, 1,\ \Pi\epsilon_i = \epsilon\right\} \qquad (\epsilon = \pm\, 1)$$

$$\{\pm\, v_i \pm v_j\} \cup \left\{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} \epsilon_i v_i \,\middle|\, \epsilon_i = \pm\, 1,\ \Pi\epsilon_i = \epsilon\right\} \qquad (\epsilon = \pm\, 1)$$

sont des systèmes de racines de type E_8. Les groupes dérivés des groupes de Weyl de ces quatre systèmes de racines, groupes que nous notons W_1, W_2, W_3, W_4, engendrent un sous-groupe Γ de $\mathrm{SO}(q)$. KANTOR construit en outre un cinquième sous-groupe W_0 de Γ (dont la définition, plus technique, ne sera pas reprise ici) et montre que :

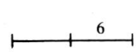
la réunion disjointe des ensembles Γ/W_i est l'ensemble des sommets d'un immeuble Δ de type $\widetilde{\mathrm{D}}_4$ dont les chambres « sont » les quintuples de sommets $(\gamma\, W_0, \ldots, \gamma\, W_4)$ (pour $\gamma \in \Gamma$), de sorte que Γ opère sur Δ par translations à gauche ;

Δ s'identifie à l'immeuble affine de $\mathrm{SO}\,(q,\, \mathbf{Q}_2)$;

Γ est le groupe arithmétique $\mathrm{SO}\left(q,\, \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right)'$.

3.5. *Immeuble de type* $\widetilde{\mathrm{G}}_2$ *associé au groupe de Lyons*

Dans un article datant de 1981 (*European J. Combinatorics*, 2 (1981), 239-247), W. KANTOR a construit au sein du groupe sporadique Ly de Lyons une « géométrie » de type

$\widetilde{\mathrm{G}}_2 =$ 

Cette géométrie est un complexe simplicial ; en vertu de théorèmes généraux, son revêtement universel est un immeuble Δ de type $\widetilde{\mathrm{G}}_2$ et l'image réciproque de Ly dans Aut Δ est un sous-groupe discret Γ de Aut Δ permutant transitivement les chambres de Δ. Le théorème 2 permet alors de donner de Δ et Γ une construction et une preuve d'existence directe, indépendante de l'existence du groupe de Lyons. La structure des groupes $P_{\{i,\,j\}}$ qu'il faut amalgamer (et les sous-groupes B, P_i à identifier) pour obtenir le groupe Γ

puis l'immeuble $\Delta = \mathscr{C}(\Gamma\,;\,B\,;\,(P_i))$ se détermine aisément à partir des renseignements donnés dans *loc. cit.* Si les sommets du diagramme $\widetilde{G}_2$ ci-dessus sont numérotés 0, 1, 2 de gauche à droite, le groupe $P_{\{0,\,1\}}$ est une extension non scindée de $SL_3(\mathbf{F}_5)$ par un groupe abélien élémentaire d'ordre 125. L'existence de cette extension, prouvée dans *loc. cit.* à l'intérieur du groupe de Lyons (que l'on sait exister), peut aussi être établie indépendamment, par exemple en utilisant le critère d'existence de groupes avec BN-paires donné dans les *C.R. Acad. Sci. Paris* 293 (1981), 317-322. La description des autres $P_{\{i,\,j\}}$ ne présente pas de difficulté.

Il serait tentant d'essayer de déduire l'existence du groupe de Lyons de celle de l'immeuble Δ et du groupe Γ, mais j'ignore comment faire.

J. T.

Le séminaire annoncé sur *Le « Monstre » de Griess-Fischer* n'a pas eu lieu : ce sujet sera traité dans le cours de l'année prochaine.

Publications

F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local,* II. *Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée* (*Publ. Math. I.H.E.S.* 60, 1984, 5-184).

F. Bruhat et J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local* (*Bull. Soc. Math. France* 112, 1984, 259-301).

J. Tits, *On R. Griess' « Friendly giant »* (*Inventiones Math.* 78, 1984, 491-499).

— , *Le Monstre* [*d'après R. Griess, B. Fischer et al.*] (*in* Séminaire Bourbaki, volume 1983/84, *Astérisque* 121/122, 1985, exposé n° 620, 105-122).

— , *Symétries* (*La Vie des Sciences*, série générale des *C.R. Acad. Sci.* 2, 1985, 13-25).

— , *Groups and group functors attached to Kac-Moody data* (*in* Arbeitstagung Bonn 1984, *Springer Lecture Notes in Math.* 1111, 1985, 193-223).

Missions

Cours et séries de conférences

Buildings of affine type (5 exposés), C.I.M.E., Conference on Buildings and diagram geometries, Côme, août-septembre 1984.

Affine buildings, arithmetic groups and finite geometries, Yale University, septembre-décembre 1984.

Wolfgang Pauli - Vorlesungen, Zürich, février 1985 :

— *Mathematische Objekte : Erfindung oder Entdeckung ?*

— *Ein ungewöhnliches mathematisches Unternehmen : Die Bestimmung aller endlichen einfachen Gruppen.*

— *Die « Monster » Gruppe.*

Exposés

— *On Griess' construction of the Monster,* Ottawa, octobre 1984 ; Yale U., novembre 1984.

— *Affine buildings, trees and valuations,* Toronto, octobre 1984.

— *An axiomatic approach to Chevalley and Kac-Moody groups,* Yale U., octobre 1984 ; Rutgers, décembre 1984.

— *On buildings and amalgamated products,* C.U.N.Y., octobre 1984.

— *Kac-Moody group schemes,* M.I.T., novembre 1984.

— *On building buildings,* M.I.T., Seminar on Combinatorics, novembre 1984.

— *On two groups that are arithmetic and two that are probably not,* Institute for Advanced Study, Princeton, novembre 1984.

— *Immeubles et groupes d'automorphismes transitifs sur les chambres,* Séminaire interuniversitaire de géométrie combinatoire, Bruxelles, mars 1985.

— *Kac-Moody groups over rings,* Oberwolfach, avril 1985.

Codirection avec T.A. Springer d'un colloque sur le thème « Algebraische Gruppen », Oberwolfach, avril 1984.