Physique mathématique

M. André LICHNEROWICZ, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de *Mardi* a été consacré à la notion d'*application coadjointe quotient* d'une algèbre de Lie et à ses applications en particulier aux *espaces homogènes de contact.*

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie réelle, de dimension finie. Sur l'espace dual $\mathcal{G}^*$, le tenseur de structure de $\mathcal{G}$ se traduit par une structure de Poisson, homogène de degré -1 par rapport au champ des homothéties infinitésimales de $\mathcal{G}^*$. Les feuilles de cette structure sont les orbites d'un groupe de Lie connexe G, d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, opérant sur $\mathcal{G}^*$ par représentation coadjointe. En particulier, Souriau a montré que tout espace homogène symplectique exact est revêtement d'une de ces orbites symplectiques, ce qui fournit un modèle universel, à un revêtement près, pour de tels espaces.

Par quotient par le groupe des homothéties positives de $\mathcal{G}^*$, la structure de Poisson de $\mathcal{G}^*$ définit sur une sphère de $\mathcal{G}^*$ une structure de Jacobi notée (Λ, E). La représentation coadjointe de G passe au quotient selon une application coadjointe quotient, intéressante en elle-même, en particulier en ce qui concerne certains problèmes de la théorie des représentations. La structure conforme de Jacobi donnée par (Λ, E) est invariante par l'application coadjointe quotient et les feuilles de (Λ, E) sont les orbites de G opérant sur la sphère par l'application coadjointe quotient. Ces orbites se trouvent munies soit d'une structure d'*espace homogène de contact* si elles sont de dimension impaire, soit d'une structure d'*espace homogène localement conformément symplectique* (l.c.s.) hamiltonien si elles sont de dimension paire.

Dans le premier cas, toute feuille $\tilde{S}$ de la structure de Poisson au-dessus d'une feuille S de dimension impaire de (Λ, E) est engendrée par des rayons de $\mathcal{G}^*$ et est une espace homogène symplectique exact. Nous avons montré que les feuilles S de dimensions impaires fournissent un modèle universel, à un revêtement près, pour une première classe d'espaces homogènes de contact, ceux dits *propres,* dont aucun revêtement n'est un espace homogène pfaffien (c'est-à-dire à 1-forme globale de contact invariante).

Dans le second cas, les feuilles $\tilde{S}$ de la structure de Poisson au-dessus de S de dimension paire sont transverses aux rayons de $\mathcal{G}^*$ et une telle feuille S est un espace homogène l.c.s. hamiltonien. Ces feuilles de (Λ, E) de dimensions paires fournissent encore un modèle universel, à un revêtement près, de tels espaces.

Le troisième cas, et le plus délicat, est celui des espaces homogènes de contact *non propres,* qui correspondent, à un revêtement près, aux espaces homogènes pfaffiens. Par contactisation de revêtements de feuilles symplectique $\tilde{S}$ convenables et transverses aux rayons on a pu donner une construction universelle, à un revêtement près, de tels espaces.

Les groupes G correspondant aux trois situations ont pu être caractérisés. Le cas où le groupe G est supposé compact conduit à des résultats bien connus. C'est lorsque G est non compact que l'analyse précédente prend toute sa valeur.

Cette analyse peut être étendue aux algèbres de Lie complexes et l'application coadjointe quotient par le groupe des homothéties complexes de $\mathcal{G}^*$ conduit à introduire des structures complexes de Jacobi sur l'espace projectif complexe associé à $\mathcal{G}^*$. On obtient ainsi des caractérisations nouvelles des espaces homogènes de contact complexes et des généralisations de résultats déjà anciens de Boothby et J.A. Wolf concernant les espaces homogènes de contact complexes compacts simplement connexes. Ces généralisations ont été esquissées.

*
**

Le cours du mercredi a porté sur l'analyse d'*extensions essentielles privilégiées d'algèbres de Lie classiques de dimensions infinies.*

Etant donné une variété différentiable W et l'algèbre de Lie L de tous les champs de vecteurs de cette variété, on peut faire opérer L sur les formes de W par dérivation de Lie. Si ϕ est l'espace des 2-formes de W, le second espace de cohomologie de Chevalley $H^2 (L, \phi)$ associé à cette représentation admet un générateur privilégié que l'on peut définir à partir d'une connexion linéaire sans torsion, par un algorithme inspiré de l'homomorphisme de Chern-Weil. On en déduit une extension privilégiée de l'algèbre de Lie L par l'espace ϕ considéré comme algèbre de Lie abélienne, extension qui n'est jamais triviale. On peut la nommer *extension universelle de L.*

Soit P un *feuilletage de Sussmann* de W admettant des feuilles de dimension > 1, L^*_P l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à P, L_P le normalisateur de L^*_P dans L. La restriction à L^*_P(resp. L_P) de l'extension universelle de L par ϕ est encore une extension essentielle.

Il en est de même en ce qui concerne l'algèbre de Lie L^*_Λ des champs hamiltoniens d'une *variété de Poisson* (W, Λ). A l'aide de Λ on peut passer à une extension de L^*_Λ par l'espace N des fonctions de W, considéré comme algèbre de Lie abélienne ou à une extension de l'algèbre de Lie de Poisson de cette variété par N. Les différentes extensions ainsi obtenues ne sont jamais triviales.

Soit $K \to W$ un fibré en droites réelles sur W, (Γ (K), [,]) une algèbre de Lie *locale* sur l'espace Γ (K) des sections de K. Une telle algèbre définit sur W *une structure conforme de Jacobi* générale, qui est de degré -1 par rapport au champ fondamental du fibré vectoriel. Soit Γ (K^*) l'espace des sections du fibré dual de K, considéré comme algèbre de Lie abélienne ; on peut faire opérer Γ (K) sur Γ (K^*) par dérivation de Lie par les champs hamiltoniens associés aux sections de K. On peut déduire des extensions concernant les variétés de Poisson une extension de (Γ (K), [,]) par Γ (K^*), extension qui n'est jamais triviale et qui provient toujours de l'extension universelle.

On a montré que, dans ce cadre, seules les extensions associées aux variétés de Poisson peuvent donner naissance à des déformations.

SÉMINAIRES

Les principaux séminaires ont été les suivants :

Michel GREEN, Superstrings theory.

A. JADCZYK, Contraintes dans la formulation des théories de Kaluza-Klein.

John MADORE, Sur les théories de Kaluza-Klein avec invariants d'Euler.

Mario NOVELLO, Vers une théorie unifiée gravitationnelle et électrofaible.

Carlos MORENO, Star-produits invariants sur les espaces symétriques kählériens.

J.F POMMARET, Méthodes formelles en Relativité Générale.

J. HELMSTETTER, Produits déformés de distributions et représentations du groupe métaplectique.

H. et Y KERBRAT, Fibrations et brisures de symétrie en théorie de Jauge.

P. GAUDUCHON, Constructions twistorielles et applications harmoniques.

Norma SANCHEZ, Trous noirs et cosmologie quantique résultats en dimensions 2 et 4.

Vincent MONCRIEF, An infinite dimensional family of space-times with Schwarzschild-like singularities.

Jacob PALIS, Bifurcations in Dynamics and fractionnal dimensions.

Jim ISENBERG, Effective Determinism in a Classical Field Theory.

Leon COOPER, Theory of an immune system.

DISTINCTION

Monsieur André LICHNEROWICZ a reçu la médaille d'or de l'Université Claude-Bernard de Lyon.

MISSIONS

Monsieur A. LICHNEROWICZ a été professeur invité à l'Université de Florence (mars-avril 1986) et à l'Université de Madrid (mai 1986). Il a été conférencier invité à la Réunion des Mathématiciens d'expression latine organisée par l'Université de Coïmbra (septembre 1985). Il a présidé les Journées Relativistes françaises organisées par l'Université de Toulouse (avril 1986) et a participé à la Conférence internationale de géométrie symplectique organisée en son honneur par l'Université Claude-Bernard à Lyon (mai 1986). Il a donné des cycles de conférences aux Universités de Rome, Turin, Dijon. Il a été professeur invité à l'Ecole d'été N.A.T.O. sur les déformations et applications organisée à Pise.

PUBLICATIONS

H. BASART et A. LICHNEROWICZ, *Conformal Symplectic Geometry, Deformation, Rigidity and Geometrical (K.M.S.) conditions. Lett. in Math. Phys.*, 10, 167-177, 1985.

A. LICHNEROWICZ et J.A. PEREIRA DA SILVA, *Extensions essentielles d'algèbres de Lie classiques de dimensions infinies* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, 301 I, 311-315, 1985).

— *Algèbres de Lie associées à une variété de Jacobi et extensions essentielles privilégiées* (*Ibidem,* 301 I, 363-368, 1985).

A. LICHNEROWICZ, *Variétés de Jacobi complexes et application coadjointe quotient* (*Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, 302 I, 315-319, 1986).

— *Espaces homogènes de contact complexes et espaces homogènes localement conformément symplectiques complexes hamiltoniens* (*Ibidem,* 302 I, 385-399, 1986).