Théorie des groupes

Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

1. Le cours de cette année était la continuation de celui de l'an dernier, consacré au *Groupe de Griess-Fischer : constructions et « Moonshine »*. L'exposé a comporté trois parties :

I. Algèbres de Heisenberg et leurs représentations ;

II. Deux constructions de la représentation « de base » d'une algèbre de Kac-Moody de type $\tilde{A}_1$;

III. Le module du Moonshine (suite).

La première partie s'est largement inspirée des bonnes feuilles, aimablement communiquées par J. Lepowsky, d'un livre en préparation de I. Frenkel, J. Lepowsky et A. Meurman, livre désigné ci-après par la référence [FLM2]. Pour II, on s'est également servi du manuscrit de [FLM2], et aussi d'un article d'exposition de J. Lepowsky : *Some constructions of the affine Lie algebra* $A_1^{(1)}$, *in Proceedings of the AMS-SIAM Summer Seminar on Applications of Group Theory in Physics and Mathematical Physics,* 1982, 375-397 (référence [Le]). Enfin, III a été développé sur la base d'une note des trois auteurs cités : *A natural representation of the Fischer-Griess Monster with the modular function J as character, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 81 (1986), 3256-3260 (ref. [FLM1]) ; cette troisième partie a fait l'objet d'un exposé de synthèse au Séminaire Bourbaki (juin 1987), dont le texte paraîtra dans la revue *Astérisque* (réf. [SB]).

Plutôt que de reprendre systématiquement les principaux résultats exposés dans le cours, et que l'on retrouvera pour la plupart dans les publications citées, nous préférons consacrer ce résumé à quelques aspects particuliers des question étudiées, aspects qui ne sont pas abordés dans le texte [SB] annoncé et sur lesquels le cours a apporté des points de vue en partie inédits.

2. Dans [FLM2], les auteurs exposent la théorie élémentaire des représentations linéaires des algèbres de Heisenberg en supposant celles-ci graduées. Cependant, on peut voir qu'en réalité, la graduation n'intervient le plus

souvent que par l'intermédiaire d'une structure bien plus faible. Pour mettre ce fait en évidence, on a été amené, dans le cours, à définir une *algèbre de Heisenberg* comme un couple (H, H_+) formé d'une algèbre de Lie *topologique* (disons sur $\mathbf{C}$) H et d'une sous-algèbre commutative H_+ possédant les propriétés suivantes : il existe une base $(x_i, y_i, c)_{i \in I}$ de H (où I est un ensemble) telle que les x_i engendrent H_+, que les y_i commutent entre eux, que $[x_i, y_i] = \delta_{ij} \cdot c$ et $[x_i, c] = [y_j, c] = 0$ pour $i, j \in I$ et que les sous-espaces de H_+ engendrés par tous les x_i sauf un nombre fini d'entre eux forment une base de voisinages de 0 dans H. Disons qu'un H -module V est *admissible* si H opère continûment sur V (doté de la topologie discrète), si les éléments de H_+ sont localement nilpotents sur V et si c induit sur V la multiplication par un scalaire non nul. La classification de ces modules est fournie par l'énoncé suivant (dont la preuve n'est pas difficile). Pour tout nombre complexe z non nul, notons $\mathcal{H}_z$ la catégorie des H-modules admissibles où c opère par multiplication par z et soit $\mathcal{F}_z$ le foncteur de $\mathcal{H}_z$ dans la catégorie des espaces vectoriels qui fait correspondre à tout module $V \in \mathcal{H}_z$ l'espace V_0 des éléments de V annulés par H_+ et à tout morphisme $V \to V'$ l'homomorphisme $V_0 \to V'_0$ qu'il induit. Alors

$\mathcal{F}_z$ est une équivalence de catégorie.

3. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe simple dont toutes les racines ont même longueur (cette hypothèse n'est pas toujours nécessaire pour ce qui va être dit), G son groupe adjoint considéré en tant que groupe algébrique, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, T le tore maximal de G qui correspond à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Kac-Moody de type affine associée à $\mathfrak{g}$, extension centrale non triviale de $\mathfrak{g}[t, t^{-1}] = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}]$ par une algèbre $\mathbf{C}c$ de dimension 1. Choisissons une base du système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$, soient $h_1, \ldots, h_l \in \mathfrak{h}$ les coracines correspondant aux éléments de cette base et $-h_0 + c$ la coracine correspondant à la racine dominante. Ainsi, les éléments $h_0, \ldots, h_l$ de $\mathfrak{H} = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{C}c$ sont les « coracines simples » de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{G}$. A toute forme linéaire λ sur $\mathfrak{H}$ prenant des valeurs entières et positives sur les h_i $(i = 0, \ldots, l)$, la théorie de Kac associe une représentation linéaire irréductible de $\mathfrak{G}$, la *représentation irréductible de poids dominant* λ. On appelle *représentation de base* de l'algèbre $\mathfrak{G}$ la représentation irréductible de poids dominant la forme linéaire définie par $h_i \mapsto \delta_{0i}$ (symbole de Kronecker) pour $i = 0, \ldots, l$. Plusieurs auteurs (notamment J. Lepowsky, R. Wilson, I. Frenkel, V. Kac) se sont intéressés au problème de la construction explicite de cette représentation. Les algèbres de Lie fournies par les constructions qu'ils ont obtenues (telles qu'elles sont décrites par exemple dans [FLM2] et, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, dans [Le]) ne sont pas l'algèbre $\mathfrak{G}$ sous sa forme « standard » donnée plus haut, mais des « modèles différents » qui sont en fait (sans que cela soit en général signalé dans la littérature) des conjuguées de $\mathfrak{G}$ dans une algèbre de Kac-Moody de la forme $\mathfrak{G}^{(1/n)} = \mathfrak{g}[t^{1/n}, t^{-1/n}] \oplus \mathbf{C}c$ (où $n \in \mathbf{N}$) par des

éléments du groupe $G(\mathbf{C}[t^{1/n}, t^{-1/n}])$, qui opère naturellement sur cette algèbre. Nous allons expliquer les raisons de ces « déplacements » de $\mathfrak{G}$.

Les procédés de construction en question ont tous pour point de départ la restriction de la représentation que l'on veut construire à une sous-algèbre de Heisenberg de $\mathfrak{G}$. Dans un article intitulé « 112 *constructions of the basic representation of the loop group of* E_8 » (*Proc. Symposium on Anomalies, Geometry, Topology,* Singapore 1985, 276-298), V. Kac et D. Peterson montrent que, réciproquement, toute « sous-algèbre de Heisenberg maximale de $\mathfrak{G}$ » — en un sens technique que nous ne préciserons pas ici — donne lieu à un procédé de construction de la représentation de base de $\mathfrak{G}$ à l'aide d'« opérateurs de sommet » (vertex operators), et que, de plus, les classes de conjugaison de telles sous-algèbres sont en bijection canonique avec les classes de conjugaison du groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}$. Cela évoque le fait bien connu que les classes de conjugaison de tores maximaux d'un groupe simple déployé X sur un corps fini k sont, elles aussi, en bijection avec les classes de conjugaison du groupe Weyl de X que nous noterons encore W. L'analogie entre ces deux situations va assez loin. Si Y est un tore déployé maximal de X, considéré comme « standard », on obtient un représentant de la classe de tores maximaux associée à un élément w de W en conjuguant Y par un élément convenablement choisi g de $X(k')$, où k' est une extension de k dont le degré est multiple de l'ordre de w. La condition imposée à l'élément g est que le quotient $g^{-1} \cdot \varphi(g)$, où φ est le générateur canonique de Gal (k'/k), soit un représentant de w dans le normalisateur de Y dans $X(k')$. De même, un représentant de la classe de sous-algèbres de Heisenberg maximales de $\mathfrak{G}$ associée à $w \in W$ s'obtient au sein de l'algèbre $\mathfrak{G}^{(1/n)}$, où n est un multiple de l'ordre de w, en intersectant $\mathfrak{G}$ avec la conjuguée de la sous-algèbre $H^{(1/n)} = \mathfrak{h}[t^{1/n}, t^{-1/n}] \oplus \mathbf{C}c$ par un élément convenablement choisi g du groupe $G(\mathbf{C}[t^{1/n}, t^{-1/n}])$, et en débarrassant l'intersection d'une « petite » composante parasite de degré 0 : on note que la sous-algèbre $H^{(1/n)}$ elle-même est somme directe d'un sous-algèbre de Heisenberg maximale, que l'on considère comme « standard », et de l'algèbre $\mathfrak{h}$ de degré 0. La condition que l'on impose à g est la même que ci-dessus, à ceci près que φ est remplacé par l'automorphisme $t^{1/n} \mapsto e^{2\pi i/n} \cdot t^{1/n}$ de $\mathbf{C}[t^{1/n}, t^{-1/n}]$.

Cependant, la sous-algèbre ${}^{g}(H^{(1/n)}) \cap \mathfrak{G}$ (et aussi sa « grosse » composante de Heisenberg) est placée « de travers » dans $\mathfrak{G}$ et se prête mal aux calculs que l'on veut faire, d'où l'intérêt qu'il y a, en pratique, à substituer au couple formé de l'algèbre $\mathfrak{G}$ et de la sous-algèbre en question son conjugué par g^{-1}, formé de l'algèbre $\mathfrak{G}^{g}$ et de son intersection avec $H^{(1/n)}$.

Lorsque $w = 1$, les considérations précédentes conduiraient naturellement à prendre pour g l'élément unité, cependant, même dans ce cas, il y a parfois avantage à « déplacer » $\mathfrak{G}$, pour la raison suivante. L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ définie plus haut possède une graduation naturelle, définie par $\deg t = 1$.

D'autre part, toute algèbre de Kac-Moody possède aussi une $\mathbf{Z}$ -graduation, dite *principale,* définie par $\deg e_i = -\deg f_i = 1$ et $\deg h_i = 0$, avec les notations e_i, f_i, h_i traditionnelles (les h_i sont les mêmes que ci-dessus). Or, si $\mathfrak{G}$ est isomorphe comme algèbre de Lie à une algèbre de Kac-Moody de type affine, elle ne l'est pas en tant qu'algèbre de Lie graduée. En revanche, si n est le nombre de Coxeter de $\mathfrak{g}$ et si g désigne l'élément de $T(\mathbf{C}[t^{1/n}, t^{-1/n}])$ sur lequel toutes les racines de la base choisie prennent la valeur $t^{-1/n}$, alors, la sous-algèbre $\mathfrak{G}^g$ de $\mathfrak{G}^{(1/n)}$, conjuguée de $\mathfrak{G}$ par g^{-1}, est isomorphe comme algèbre de Lie graduée à l'algèbre de Kac-Moody en question, dotée de sa graduation principale divisée par n.

Supposons en particulier que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$: c'est ce cas (ou plutôt celui de $\mathfrak{sl}_2^{24}$) qui intervient dans la construction du module du Moonshine, selon [FLM1] et [FLM2]. Aux deux éléments 1 et -1 du groupe de Weyl correspondent deux constructions essentiellement différentes, dites respectivement « homogène » et « tordue » (twisted), ou encore « bosonique » et « fermionique », de la représentation de base de l'algèbre $\mathfrak{G}$. En fait, Frenkel, Lepowsky et Meurman sont amenés à considérer *quatre* modèles de $\mathfrak{G}$, sous-algèbres de $\mathfrak{G}^{(1/2)}$, à savoir $\mathfrak{G}$ elle-même et ses conjuguées ${}_1\mathfrak{G}$, ${}_2\mathfrak{G}$, ${}_3\mathfrak{G}$ par les matrices

$$\begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t^{1/2} & 1 \\ -t^{1/2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} it^{1/2} & i \\ -t^{1/2} & 1 \end{pmatrix}$$

(ou, si l'on préfère, par leurs images dans $G(\mathbf{C}[t^{1/2}, t^{-1/2}]) = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}[t^{1/2}, t^{-1/2}])$). Les deux algèbres $\mathfrak{G}$, ${}_1\mathfrak{G}$ correspondent à $w = 1$, mais seule ${}_1\mathfrak{G}$ a la graduation de Kac-Moody (à un facteur 2 près). Quant à ${}_2\mathfrak{G}$ et ${}_3\mathfrak{G}$, elles correspondent à $w = -1$ et, étant conjuguées à ${}_1\mathfrak{G}$ par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

elles sont isomorphes à ${}_1\mathfrak{G}$ comme algèbres de Lie graduées.

4. Pour introduire l'observation suivante, commençons par décrire en termes assez généraux le principe des procédés de construction de la représentation de base, auxquels il a été fait allusion au numéro précédent. Ici, $\mathfrak{G}$ désignera non plus l'algèbre de Lie notée ainsi au n° 3 mais sa conjuguée (notée $\mathfrak{G}^g$ précédemment) qui intervient dans la construction que l'on veut décrire. L'intersection $H = \mathfrak{G} \cap H^{(1/n)}$ (cf. n° 3) est le produit d'une algèbre de Heisenberg H' et d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{h}$, laquelle centralise H'. L'algèbre H' est graduée et l'on note H'_+ (resp. H'_-) la somme de ses composantes de degré strictement positif (resp. négatif). Soient V le module de la représentation de base de $\mathfrak{G}$ et V_0 l'espace vectoriel des éléments de V annulés par H'_+. La théorie des représentations admissibles des algèbres de

Heisenberg s'applique au H' -module V et permet de l'identifier au produit tensoriel

$$(*) \qquad \mathcal{S}(H'_-) \otimes V_0,$$

où $\mathcal{S}(H'_-)$ désigne l'algèbre symétrique de H'_-, laquelle est un H' -module de la façon bien connue : les éléments de H'_- opèrent par multiplication, c induit la multiplication par un scalaire approprié (facile à calculer) et les éléments de H'_+ sont représentés par des dérivations partielles. Pour déterminer l'action de l'algèbre $\mathfrak{G}$ sur V, on commence par exprimer sous forme d'équations le fait que les opérations *connues* de H' sur $\mathfrak{G}$ (par la représentation adjointe) et sur V sont compatibles. *Grosso modo,* et de façon quelque peu incorrecte, on peut dire que la résolution de ces équations — un calcul formel où s'introduisent les « opérateurs de sommet » — détermine l'action de $\mathfrak{G}$ sur le premier facteur du produit tensoriel (*) mais ne donne aucune prise sur le second facteur V_0. Pour achever la détermination de l'opération de $\mathfrak{G}$ sur V, on dispose alors de deux méthodes.

Méthode directe. On écrit des formules hypothétiques tenant compte du résultat déjà établi mais dans lesquelles la « contribution de V_0 » figure sous la forme d'opérateurs (éléments de End V_0) inconnus. Ensuite, on détermine ces opérateurs par un calcul direct, en exprimant que les formules en question fournissent une représentation de $\mathfrak{G}$. C'est la méthode utilisée par exemple dans [FLM2] (elle est aussi exposée très simplement dans [Le], pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$). Lorsque le calcul est adroitement organisé, par un usage judicieux de séries formelles doublement infinies à deux variables, il est relativement court et tout à fait élémentaire, mais les transformations formelles que l'on doit effectuer sont un peu périlleuses et la justification de leur légitimité demande beaucoup de précautions.

Méthode indirecte, utilisant la formule des caractères de V. Kac. Soit d la dérivation de $\mathfrak{G}$ qui opère sur la composante homogène de degré i par la multiplication par i. On sait que la représentation de $\mathfrak{G}$ dans V se prolonge au produit semi-direct $\mathfrak{G} + \mathbf{C}d$. Comme la sous-algèbre $\mathfrak{h}_0 + \mathbf{C}d$ normalise H', elle stabilise V_0. De la formule des caractères, due à V. Kac, on peut déduire la structure de $(\mathfrak{h}_0 + \mathbf{C}d)$ -module de V ; celle de $\mathcal{S}(H')$ étant évidemment connue ($\mathfrak{h}_0$ annule $\mathcal{S}(H')$ et d multiplie tout élément homogène de $\mathcal{S}(H')$ par son degré), on en déduit, « par division », celle de V_0. Ainsi, on connaît la structure de $(H + \mathbf{C}d)$ -module de V. Il s'avère que ce module est toujours simple (cf. l'article cité de V. Kac et D. Peterson), de sorte que la compatibilité des opérations de $H + \mathbf{C}d$ sur $\mathfrak{G}$ et sur V détermine à une constante près, qu'il est facile de calculer, l'action de tout élément de $\mathfrak{G}$ sur V, c'est-à-dire la structure de $\mathfrak{G}$ -module cherchée.

Le principe de la méthode est, on le voit, assez simple, mais sa mise en œuvre l'est moins. Considérons seulement, comme on l'a fait dans le cours, le cas particulier, important pour l'application au groupe de Griess-Fischer, de l'algèbre $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_2$.

Supposons d'abord que $\mathfrak{G}$ est l'algèbre ${}_2\mathfrak{G}$ du n° 3 (construction tordue). On a alors $\mathfrak{h}_0 = \{0\}$ et l'on trouve par le procédé décrit plus haut que $\dim V_0 = 1$: il suffit de constater que les d-modules $\mathcal{S}(H')$ et V sont isomorphes, c'est-à-dire que les espaces gradués $\mathcal{S}(H')$ et V ont même séries de Poincaré, ce qui, tous calculs faits, se ramène à une identité classique entre fonctions modulaires. Dans le cours, la représentation de base de ${}_2\mathfrak{G}$ a été obtenue par chacune des deux méthodes, directe et indirecte.

Lorsque $\mathfrak{G} = {}_1\mathfrak{G}$ (cas de la construction homogène), la formule de Kac ramène la détermination du $\mathfrak{h}_0$ -module V_0 à la preuve d'une identité entre fonctions « de type modulaire » qui n'est plus, cette fois, une identité classique. Il est possible, comme me l'a montré O. Gabber, d'établir directement cette identité, par des arguments relevant de la théorie des formes modulaires, mais le cours a procédé différemment : une partie seulement de l'information fournie par la formule de Kac a été utilisée, conjointement à une formule classique de Gauss, pour *deviner* la structure du $\mathfrak{h}_0$ -module V_0 et en déduire conjecturalement la forme exacte (i.e. sans inconnues) des formules donnant la représentation de base de ${}_1\mathfrak{G}$; ensuite, on a vérifié ces formules par un simple calcul, comme dans la méthode directe.

On voit que pour construire les représentations de base des algèbres de Kac-Moody de type affine à l'aide de la formule des caractères de Kac, on doit au préalable établir certaines identités, parfois difficiles, entre fonctions « de type modulaire » ; c'est une démarche en quelque sorte inverse de celle suivie par A. Feingold, J. Lepowsky, S. Milne, R.L. Wilson et d'autres dans une série de publications où ils déduisent de nombreuses identités remarquables, classiques ou nouvelles, de la théorie de Kac-Moody et, plus particulièrement, de la formule de Kac (cf. par exemple l'exposé de J. Lepowsky dans les actes du Congrès International des Mathématiciens de Helsinki, 1978, vol. 2, p. 579-584).

5. Devant appliquer la formule des caractères de V. Kac à des cas concrets, comme on vient de le voir, on a été amené, dans le cours, à donner de cette formule une interprétation un peu différente de celle que l'on trouve dans la littérature (par exemple dans V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Birkhäuser, 1983).

Rappelons que la donnée de base de la théorie de Kac-Moody, selon la formulation donnée dans le cours de 1981-1982, consiste en un ensemble fini I, un réseau (groupe abélien libre de type fini) Λ et des injections $i \mapsto \alpha_i$ et $i \mapsto h_i$ de I dans Λ et dans son $\mathbf{Z}$ -dual, telles que la matrice $(\alpha_i(h_j))$ soit une matrice de Cartan généralisée. A une telle donnée est associée, entre autres choses , une algèbre de Lie L, *l'algèbre de Kac-Moody* correspondante, qui est $\mathbf{Z}^I$-graduée. Les degrés non nuls effectivement représentés sont appelés les *racines*. Les racines contenues dans $\mathbf{N}^I$ sont dites *positives*. Nous supposons désormais que les h_i sont linéairement indépendants. Comme il a été rappelé au n° 3 dans un cas particulier, à tout élément $\lambda \in \Lambda$ tel que les $\lambda(h_i)$ soient tous positifs est associé un L -module simple V_λ, le *module simple de poids dominant* λ. La formule suivante qui donne le « caractère » de ce module, en un sens qui sera précisé plus loin, a été obtenue par V. Kac sous l'hypothèse que la matrice $(\alpha_j(h_i))$ est produit d'une matrice symétrique et d'une matrice diagonale (cf. le livre cité de V. Kac, Chap. 10) et étendue au cas général par O. Mathieu :

$$(1) \qquad \mathrm{Ch}(V_\lambda) = (\sum_w \epsilon(w) \cdot e(w(\lambda + \rho) - \rho))/(\prod_\alpha(1 - e(-\alpha))^{\mathrm{mult}\alpha}).$$

Ici, w parcourt le *groupe de Weyl* W, dont nous rappelons seulement, pour l'instant, qu'il est engendré par des « réflexions fondamentales » r_i $(i \in I)$, $\epsilon(w)$ est égal à $+1$ ou à -1 selon que w est produit d'un nombre pair ou d'un nombre impair de telles réflexions, α parcourt l'ensemble des racines positives, multα désigne la multiplicité de α, c'est-à-dire la dimension de la composante de L de degré α, le symbole e peut être vu comme une « exponentielle formelle », soumise à l'identité $e(x + y) = e(x) \cdot e(y)$, et ρ est un élément de Λ tel que $\rho(h_i) = 1$ pour tout i. Lorsque L est de dimension finie, le « réseau des racines » $\mathbf{Z}^I$, auquel appartiennent les α, est naturellement contenu dans le « réseau des poids » Λ, qui renferme λ et ρ et sur lequel opère W, ce qui donne sa signification au second membre de (1). Mais il n'en est plus de même en général et, pour donner un sens à (1), il est nécessaire d'inclure $\mathbf{Z}^I$ et Λ dans un même W -module, ce qui peut être fait de diverses façons. Dans le cours, on a trouvé commode d'adopter la solution naïve consistant à travailler simplement dans le groupe somme directe $\mathbf{Z}^I \oplus \Lambda$, sur lequel W opère par

$$(2) \qquad r_i(\lambda') = \lambda' - \lambda'(h_i)\tilde{\alpha}_i \text{ pour } \lambda' \in \Lambda,$$

$$(3) \qquad r_i(\tilde{\alpha}_j) = \tilde{\alpha}_j - \alpha_j(h_i)\tilde{\alpha}_i \text{ pour } j \in I,$$

où $(\tilde{\alpha}_j)_{j \in I}$ désigne la base canonique de $\mathbf{Z}^I$. On voit facilement que cette interprétation des notations donne bien un sens au second membre de (1) et permet de le calculer effectivement dans les cas pratiques que l'on a eu à considérer dans le cours. De plus, en vertu de (2), tout élément de Λ s'annulant sur les h_i est fixe par W, par conséquent le second membre de (1) prend la même valeur quel que soit le choix de $\rho \in \Lambda$ tel que $\rho(h_i) = 1$ pour tout i ; plus précisément, $w(\lambda + \rho) - \rho$ est un élément de $\lambda + \mathbf{Z}^I$ ne dépendant que de w et λ et non du choix particulier de ρ. Ainsi, le numérateur du second membre de (1), donc aussi le second membre tout entier, est une série formelle, somme d'éléments de $e(\lambda + \mathbf{Z}^I)$. L'interprétation à donner au premier membre est alors claire : le module V_λ possède une graduation à valeurs dans $\lambda + \mathbf{Z}^I$ (et même dans $\lambda + (-\mathbf{N})^I$), graduation compatible avec la

$\mathbf{Z}^I$-graduation de L et telle que les vecteurs de poids dominant soient homogènes de degré λ (ces propriétés caractérisent la graduation), et l'on pose par définition $\mathrm{Ch}(V_\lambda) = \Sigma\, c(\mu)\, e(\mu)$, où μ parcourt l'ensemble $\lambda + \mathbf{Z}^I$ et $c(\mu)$ désigne la dimension de la composante homogène de degré μ de V.

6. Dans le cours de 1982-1983 qui a repris, en substance mais d'un point de vue un peu différent, le contenu de l'article fondamental de R. Griess « *The Friendly Giant* » (*Inventiones Math.* 69 (1982), 1-102), le groupe sporadique de Griess-Fischer (le « Monstre »), noté F, a été obtenu comme un groupe linéaire engendré par deux sous-groupes, un groupe C extension du groupe de Conway Co_1 par un 2-groupe d'ordre 2^{25}, et un groupe que nous appellerons ici D, extension du produit direct du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et du groupe de Mathieu M_{24} par un 2-groupe d'ordre 2^{35} (le groupe D *était noté* $\check{D}$ dans le cours de 1982-1983 et $\hat{D}$ dans celui de l'an dernier).

L'objectif des articles [FLM1] et [FLM2] est la construction d'un F -module gradué V ayant pour série de Poincaré (série génératrice des dimensions des composantes homogènes) la série J - 744, où J est le développement à l'infini de l'invariant modulaire. Nous ne rappellerons pas ici les raisons qu'on a de s'intéresser à un tel module : voir l'article de J. Conway et S. Norton « *Monstrous Moonshine* » (*Bull. London Math. Soc.* 11 (1979), 308-339), et aussi l'exposé [SB]. La construction proposée par Frenkel, Lepowsky et Meurman peut s'interpréter de la façon suivante. Le $< C, D >$ -module gradué V est obtenu à partir d'un groupe fini $\tilde{C}$, extension de Co_1 par un 2-groupe, d'un groupe $\tilde{D}$, extension de $\mathfrak{S}_3 \times \mathrm{M}_{24}$ par un 2-groupe, d'un $\tilde{C}$ -module gradué V', d'un $\tilde{D}$ -module gradué V'' contenant V' comme espace vectoriel gradué, et d'un sous-espace gradué V de V'. Les stabilisateurs de V dans $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$ induisent sur V les groupes C et D qui engendrent F. (Précisons que dans les articles cités, il n'est pas question des groupes D et $\tilde{D}$, mais seulement d'un automorphisme σ de V'' stabilisant V et tel que F soit engendré par C et par la restriction de σ à V.)

Le C -module V' a été décrit dans le cours de l'an dernier. En particulier, on a vu que l'espace gradué V' est donné par une formule simple (formule (1) du résumé de cours, p. 102, où V' est noté W), faisant intervenir le réseau de Leech Λ et une extension centrale $\hat{\Lambda}$ de celui-ci par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. La troisième partie du cours de cette année avait pour but la description du $\tilde{D}$ -module V''. L'espace V'' est donné par une formule tout à fait analogue à l'autre, où Λ est remplacé par un réseau K contenant Λ comme sous-réseau d'indice 2 (K est engendré par Λ et le produit par 1/2 d'un élément de Λ de carré scalaire 8, élément que l'on peut choisir arbitrairement) et $\hat{\Lambda}$ est remplacé par une extension centrale de K par $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Il reste alors à exhiber le groupe $\tilde{D}$ et la structure de $\tilde{D}$ -module de V'', ce qui est beaucoup moins simple. Le groupe $\tilde{D}$ est extension du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ par un groupe $\tilde{D}'$, lui-même extension de M_{24} par un 2-groupe. L'action de $\tilde{D}'$sur V'' est, au moins en principe, facile à décrire ; toute la difficulté réside dans son prolongement au groupe $\tilde{D}$ tout entier, donc, en quelque sorte, dans l'« action sur V'' du facteur $\mathfrak{S}_3$ de $\tilde{D}$ ». C'est là qu'intervient l'ingrédient à caractère arithmétique non trivial de la construction, à savoir l'isomorphisme entre les deux versions (bosonique et fermionique) du module de base de l'algèbre de Kac-Moody de type $\tilde{A}_1$. Ces questions faisant l'objet de [SB], nous n'en dirons pas plus ici.

J. T.

En liaison avec le sujet principal du cours, deux exposés de séminaire, par R. Griess, ont été consacrés aux boucles de Moufang que l'on peut obtenir par extension centrale de certains codes (Cf. R. Griess, *Code loops, Journal of Algebra,* 100 (1986), 224-234), et à une définition directe du groupe D du n° 6 ci-dessus à partir d'une boucle de ce type, la *boucle de Parker.*

Publications

J. Dieudonné et J. Tits, *La vie et l'œuvre de Claude Chevalley* (*in* La vie des Sciences, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série générale,* 3, 1987, 559-565).

W. Kantor, R. Liebler and J. Tits, *On discrete chamber-transitive automorphism groups of affine buildings* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 16, 1987, 129-133).

J. Tits, *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields* (*Journal of Algebra,* 105, 1987, 542-573).

— , *Buildings and group amalgamations* (*in* Proceedings of Groups St Andrews 1985, ed. E.F. Robertson & C.M. Campbell, *London Math. Soc. Lecture Notes* n° 121, 1986, 110-127).

Missions

Exposés

— *Groupes de Chevalley et de Kac-Moody : présentation et reconnaissance,* I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, novembre 1986.

— *Symmetrie,* exposé à l'occasion d'une remise de doctorat *honoris causa,* Bonn, novembre 1986.

— *Monstre et Moonshine,* Contact Franco-Belge, Namur, mai 1987 ; *id.* (en anglais), Arbeitstagung, Bonn, juin 1987.

— *Sur l'existence des groupes exceptionnels et de quelques autres,* Colloque International de Géométrie (Colloque Koszul), Grenoble, juin 1987.

— *Le module du « Moonshine » (d'après I. Frenkel, J. Lepowsky et A. Meurman),* Séminaire Bourbaki, juin 1987.

Distinction

Docteur *honoris causa* de l'Université de Bonn, 1986.