Physique statistique

M. Philippe NOZIÈRES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Cours

Deux enseignements complets ont été donnés cette année, l'un à Paris sur « Transitions du premier ordre : domaines et nucléation », l'autre à l'Université Claude-Bernard de Lyon sur « Instabilités et bifurcations dans les systèmes non linéaires ».

I. *TRANSITIONS DU PREMIER ORDRE : DOMAINES ET NUCLÉATION*

Dans de nombreux systèmes physiques, la configuration stationnaire stable correspond à la coexistence de *domaines* homogènes, séparés par des *parois* de largeur finie. C'est le cas des transitions de phase du premier ordre à l'équilibre thermodynamique (par exemple la séparation liquide-gaz, ou les parois de Bloch dans un ferromagnétique). Mais le phénomène est beaucoup plus général : la mise spontanée en domaines peut se produire dans des systèmes *dissipatifs* où l'on ne saurait invoquer la thermodynamique d'équilibre. Les exemples abondent : domaines électriques dans un conducteur, écoulement bouchon dans une suspension, etc.

L'objet de ce cours était de dégager les idées générales communes à tous ces phénomènes apparemment disparates : nature du diagramme d'état (limite « spinodale » de métastabilité, point critique) — structure des parois et condition de coexistence de deux phases (positionnement d'un « palier de Maxwell ») — dynamique des parois hors de l'équilibre — dynamique de la séparation de phases (nucléation, décomposition spinodale). Cet effort de synthèse s'est appuyé sur un certain nombre d'exemples concrets.

1) *Transitions à l'équilibre thermodynamique*

La description la plus simple est celle de Van der Waals, fondée sur une approximation de champ moléculaire : l'énergie libre f est fonction d'un paramètre d'ordre *moyen* ϕ ; on minimise l'énergie libre totale (ou plutôt une enthalpie si ϕ est conservé). Un état homogène est localement instable si $f'' < 0$. On construit ainsi facilement la courbe spinodale, le point critique. La courbe de coexistence s'obtient par une construction classique de double tangente (« construction de Maxwell »).

Cette procédure est si familière qu'on tend à oublier son vice de fond : à température finie, la notion d'énergie libre suppose la définition d'une entropie, c'est-à-dire d'une distribution de fluctuations bien contrôlée. C'est manifestement impossible pour un état métastable : il faut borner les fluctuations pour définir f. On peut les borner en amplitude (en extrapolant la courbure locale de $f(\phi)$) ou en longueur d'onde (« coarse graining ») : dans un cas comme dans l'autre, la procédure est ambiguë près de la limite spinodale.

a) *L'approximation de Landau Ginzburg statique à $T = 0$*

On introduit dans l'énergie libre un terme de raideur du paramètre d'ordre, qui définit une longueur caractéristique ξ. On peut ainsi construire une *paroi plane* séparant deux domaines en *équilibre.* Pour un paramètre d'ordre unique, on obtient facilement le profil de la paroi (d'épaisseur $\sim \xi$) et son énergie γ [un exemple intéressant est celui d'une transition du premier ordre entre un état « normal » $\phi = 0$ et un état ordonné $\phi = \pm \phi_m$: près de la transition, la paroi $(+\phi_m, -\phi_m)$ s'élargit]. Lorsque le paramètre d'ordre a plusieurs composantes, la caractérisation de la paroi est beaucoup plus délicate (il faut trouver la séparatrice correspondante) — mais le problème est bien posé. Dans un cas comme dans l'autre, on montre que la paroi est une structure *stable.*

Une paroi *sphérique* implique une sursaturation du milieu extérieur : l'équilibre est déplacé par les corrections capillaires. Si la sursaturation est faible, le rayon R de la goutte est $\gg \xi$: on peut séparer énergies de surface et de volume, et l'on retrouve le modèle de nucléation classique de Gibbs-Thomson. La configuration stationnaire correspond à un *germe critique*, d'autant plus petit que la sursaturation est grande. Ce germe critique est un point col de l'énergie libre, instable quant au rayon, mais stable quant aux déformations : c'est lui qui caractérise la barrière de nucléation de la phase stable.

Lorsqu'on s'approche de la limite spinodale, R devient $\sim \xi$: le profil du germe critique doit alors être calculé numériquement (théorie de Cahn-Hilliard). Qualitativement, la barrière de potentiel qui protège l'état métastable tend à s'effacer : le rayon du germe critique se remet à croître et diverge à la limite spinodale, alors que l'énergie dudit germe tend vers 0. Pour chaque dimension d, on sait préciser les lois de variation correspondantes.

b) *Fluctuations thermiques*

Pour une phase homogène à l'équilibre, il faut comparer l'amplitude des fluctuations sur une *échelle* ξ à l'écart ϕ_m avec l'autre phase stable. Le rapport $r = \phi_m^2/\delta\phi^2 \sim f\, \xi^d/T$ mesure la hauteur de la barrière de potentiel sur une échelle ξ. Loin du point critique, $r \gg 1$: les fluctuations sont négligeables. Lorsque $r \sim 1$, les fluctuations deviennent vitales : c'est le critère de Ginzburg qui marque l'entrée dans le domaine critique.

Plus généralement, une phase métastable n'a de sens que si la barrière de nucléation E_c à franchir pour atteindre la phase stable est $\gg T$: *la limite spinodale est donc floue*, s'étalant sur toute la région $E_c \sim T$. En régime critique $r < 1$, cette largeur est $\sim \phi_m$: la nucléation est immédiate quelle que soit la sursaturation. En régime champ moyen, $r \gg 1$, cette région de transition est au contraire très étroite ($\delta\phi/\phi_m \sim r^{-2/3}$ pour une dimension $d = 3$).

c) *Un exemple concret : les domaines ferromagnétiques*

L'énergie d'échange est en général dominante et tend à donner à l'aimantation M une longueur fixée, M^2 = cte. Le terme de raideur contrôle alors la *rotation* de M d'un point à l'autre. Pour construire une paroi, il faut adjoindre à ce terme de raideur une *énergie d'anisotropie* qui tend à aligner $\vec{M}$ par rapport aux axes cristallographiques. Cette anisotropie a la symétrie du cristal : dans les cas les plus simples, elle définit un axe de facile aimantation. La paroi de Bloch élémentaire décrit alors une rotation de $\vec{M}$ de 180° : c'est un compromis entre échange et anisotropie. A noter que cette paroi a une chiralité : elle a ses propres défauts (« lignes de Néel »).

Le problème se complique du fait de l'interaction dipolaire magnétique, traduite par un *champ démagnétisant* $\sim \mu_0 M$ qui dépend de la forme des domaines (la thermodynamique correspondante est classique, mais un peu subtile). Ce champ démagnétisant tend à faire tourner l'aimantation dans le plan de la paroi et rentre ainsi en compétition avec une éventuelle anisotropie azimuthale. De toute manière, c'est la compétition entre échange et énergie magnétique qui va contrôler la structure des lignes de Néel.

Du fait de ce champ démagnétisant, une plaque mince d'épaisseur L en champ nul se fragmente en domaines parallèles dont la largeur ℓ est un compromis entre énergie de paroi et énergie magnétique : $\ell \sim \sqrt{L\,\xi}$. En fait ce n'est là qu'une première approximation. Aux faibles anisotropies, les lignes de flux se ferment à l'intérieur de l'échantillon et le calcul détaillé est compliqué. Pour des plaques plus épaisses $L \gg \xi$, on assiste à un phénomène de branchement en cascade des domaines jusqu'à une échelle $\sim \xi$. De toute manière, la structure en bandes parallèles devient instable dans un champ appliqué suffisamment fort : on passe à une géométrie désordonnée, puis à une structure en bulles.

Le comportement d'une « bulle magnétique » unique est particulièrement intéressant. Le jeu combiné de l'énergie de paroi et du champ démagnétisant permet de définir une « énergie de paroi effective » qui devient négative pour un film épais, $L > L^*$. En ajoutant le couplage au champ extérieur, on obtient ainsi une bulle stationnaire métastable dans une matrice stable (c'est l'opposé du germe critique de nucléation). La plage d'existence de cette bulle est limitée aux forts champs par son effondrement, aux faibles champs par sa déformation spontanée. On sait calculer ces deux champs critiques en fonction de L/L^*. La généralisation à un réseau de bulles ne peut être que numérique — elle est d'une grande importance technologique (mémoires à bulles).

Toute cette analyse se transpose facilement à *l'état intermédiaire* des supraconducteurs de type I.

2) *Systèmes multistables hors d'équilibre*

a) *Systèmes discrets : la diode tunnel Esaki*

Avec sa caractéristique I (V) « en N », la diode peut avoir plusieurs points de fonctionnement stationnaires si on l'alimente en continu à travers une résistance de charge R. La dynamique est contrôlée par la capacité parallèle C, inévitable. En variant R et la fem du générateur E_0, on retrouve toutes les caractéristiques d'une transition du premier ordre : multistabilité en dessous d'un point critique, limites spinodales, hystérésis, ralentissement critique, etc. A noter la possibilité d'instabilités secondaires qui peuvent masquer complètement les limites spinodales. C'est le cas en particulier si on remplace la capacité parallèle par une self série : les équations de mouvement sont alors multiformes. Pour lever l'ambiguïté, il faut introduire une capacité parasite, élargissant ainsi l'espace des phases : on constate que le circuit se met à osciller bien avant d'atteindre la limite spinodale.

Seules les fluctuations (ici le bruit électrique) peuvent faire basculer le système d'un point de fonctionnement stable vers un autre. Le « palier de Maxwell » correspond à une égale probabilité des deux états. On peut décrire ce bruit à l'aide d'une équation de Fokker Planck : la probabilité de basculement dépend de toute évidence de la diffusivité D — il en sera de même de la position du palier de Maxwell. Contrairement aux situations d'équilibre, ce palier n'est pas déterminé par les seuls états stationnaires en présence : il dépend de l'évolution intermédiaire. On a souvent invoqué à cet égard un principe de production minimum d'entropie : ce principe est ici erroné.

Toute cette analyse concernait un système bistable : elle se généralise aisément à une infinité de points de fonctionnement, l'exemple typique étant la jonction Josephson entre deux supraconducteurs.

b) *Systèmes continus : la lampe fer hydrogène*

Elle est constituée d'un filament résistif qui évacue sa chaleur Joule par conduction à travers un gaz inerte. La forme de la résistance R (T) conduit à une bistabilité dans toute une plage de tension appliquée : on retrouve les mêmes caractéristiques que pour la diode Esaki. La nouveauté est le positionnement du palier de Maxwell, qui correspond ici à la formation d'une *paroi stationnaire* dans le filament, séparant deux domaines homogènes. La structure et la dynamique de la paroi sont contrôlées par la conduction thermique le long du filament, qui fournit le terme de « raideur » requis. Cet exemple très simple dégage clairement la physique des domaines en régime dissipatif.

Ici encore, on peut essayer de positionner le palier de Maxwell par un principe de production minimum d'entropie. Ce principe, délicat à mettre en œuvre, n'est en fait valable qu'au voisinage d'un point de fonctionnement stationnaire : il exprime alors la *stabilité* de cet état. Sous sa forme naïve, il ne permet pas de comparer deux états stationnaires éloignés l'un de l'autre. La formulation et les limitations de ce principe ont été discutées en détail : il paraît peu utile dans ce contexte.

c) *Instabilités de courant dans un conducteur*

Elles apparaissent dès que la caractéristique I (V) est réentrante, qu'elle soit « en N » (lampe fer hydrogène, effet Gunn dans GaAs) ou « en S » (arc électrique). Dans le premier cas, il apparaît des domaines de *champ longitudinaux* (structuration dans une direction parallèle au champ électrique, à courant constant). Le second cas correspond à des domaines transverses de courant (filaments). L'origine physique de l'instabilité est variable : ionisation par avalanche, échauffement des porteurs par effet Joule (affectant soit la mobilité, soit le mécanisme de recombinaison, soit le transfert dans une autre bande). Notre objectif était de dégager les éléments communs à tous ces effets.

La première étape est de localiser l'instabilité de l'état homogène, présente dès que la conductance différentielle $\sigma_d = \partial I / \partial V$ est négative. Cette instabilité peut être due à un effet de charge d'espace (en géométrie longitudinale) : elle est alors convective, entraînée à la vitesse moyenne des porteurs. Elle peut être aussi d'origine thermique : selon le signe de $d\sigma / dT$, il apparaît des fluctuations spontanées de champ ou de courant. Dans un cas comme dans l'autre, la diffusion joue un rôle stabilisant aux courtes longueurs d'onde.

L'évolution ultérieure d'un système instable est contrôlée par des équations non linéaires, solubles explicitement dans des cas simples. En géométrie transverse, on décrit ainsi l'apparition de filaments stables si l'on opère à courant constant (la diffusion stabilise d'éventuelles déformations). Un cas plus intéressant est celui de l'effet Gunn en géométrie longitudinale, pour lequel il existe une zoologie de solutions : ondes de choc, parois de champ électrique séparant deux régions $E_1 \neq E_2$ (on a alors un domaine de *charge*), onde solitaire de champ. Toutes ces structures sont entraînées le long de l'échantillon à une vitesse c, impliquant une oscillation globale avec comme période le temps de transit. En principe, le palier de Maxwell correspond à un domaine de largeur stationnaire $\gg \xi$ [vitesses égales pour les parois (12) et (21)]. En fait on observe toujours des domaines étroits, dont on peut calculer l'amplitude et la forme.

d) *Instabilité d'écoulement d'une suspension : effet bouchon*

La viscosité d'une suspension dépend de la concentration n de particules. Celle-ci peut à son tour dépendre du profil de vitesse — d'où un mécanisme d'instabilité : un écoulement homogène se fragmente spontanément en domaines.

La géométrie la plus simple correspond à un écoulement de Couette ou de Poiseuille, caractérisé par un cisaillement $\gamma = \partial V_z/\partial x$. L'ingrédient de base du modèle est une force de portance subie par chaque particule, $F_x = -\beta\gamma\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}$. A ce stade, cette force est phénoménologique, compatible avec la symétrie : aux forts nombres de Reynolds, elle serait analogue à une force de Magnus. Le coefficient β est macroscopique, moyenné sur un grand nombre de particules : il est mesurable en étudiant le profil de concentration dans un écoulement de Poiseuille. Si $\beta > 0$, on montre facilement qu'un écoulement de Couette homogène est instable si $\gamma > \gamma_c$ (c'est la limite spinodale !) : le système se fragmente en deux phases, l'une de n petit, γ grand, l'autre de n grand, γ petit. Tel qu'il est, le modèle n'a pas d'échelle de longueur (tous les k sont instables ensemble) : on ne peut pas construire de paroi — et donc on ne peut pas formuler la condition de coexistence. Le point critique, en revanche, résulte de la simple connaissance de la limite spinodale. Ce modèle d'écoulement bouchon reste très spéculatif — mais il illustre bien, dans un contexte différent, la méthodologie de la mise en domaines.

3) *La dynamique des domaines*

C'est un problème beaucoup plus riche, mais aussi beaucoup plus délicat, où les controverses sont loin d'être toutes résolues : dans ce cours, nous avons essayé de faire le point de la situation actuelle, en dégageant quelques idées simples avec un minimum de complexité mathématique. D'emblée, le problème se sépare en deux, selon que le paramètre d'ordre ϕ est ou non conservé. Si ϕ n'est pas conservé, la relaxation est *locale* (ϕ se « fabrique » sur place). Au contraire, la relaxation est *diffusive* lorsque ϕ est conservé (elle disparaît aux grandes échelles).

a) *Paramètre d'ordre non conservé*

Le point de départ est une équation de Landau Ginzburg dépendant du temps

$$\eta\dot{\phi} = \lambda\Delta\phi - \frac{\partial f}{\partial\phi} = -\mu$$

μ mesure l'écart à l'équilibre local, η le frottement. A grande échelle, $k\xi \ll 1$, il apparaît un temps de relaxation naturel $\tau = \lambda/\eta\xi^2$. On peut ainsi décrire une paroi plane *mobile* entre deux phases hors d'équilibre ($f_2 - f_1 = \Delta f \neq 0$) et calculer sa vitesse c (Δf). Près de l'équilibre c est linéaire, avec une mobilité $\mu = \lambda/\eta\gamma$ (γ = énergie de paroi). Aux forts Δf il apparaît une dispersion, mais c reste fini à la limite spinodale.

Pour une paroi courbe, il faut tenir compte des surpressions capillaires. Si $f_2 = f_1$, la vitesse de l'interface est reliée très simplement à sa courbure κ par la relation d'Allen-Cahn, $c = -\lambda\kappa/\eta$. (l'énergie de paroi disparaît !). Une application simple est la loi de croissance de l'échelle spatiale R lors d'une expérience de décomposition spinodale par trempe (dans une séparation d'antiphases, par exemple) : il vient $R \sim \sqrt{\lambda t/\eta}$, un résultat caractéristique du cas ϕ non conservé.

d) *Paramètre d'ordre non conservé*

C'est le cas le plus fréquent : ϕ répond alors à $\Delta\mu$, et non plus à μ. En général, la vitesse de la paroi est limitée par la diffusion en volume, et la notion de mobilité d'interface est ambiguë. L'équation dynamique est surtout utile pour décrire l'évolution d'un état *instable*, qui dans ses premiers stades a un spectre caractéristique

$$i\omega \sim k^2\,[ak^2 - b]$$

Les modes les plus instables ont un k *fini*. Ce modèle de Cahn-Hilliard reste très limité, car les couplages mode-mode non linéaires deviennent vite dominants : le mieux que l'on puisse espérer est de raccorder plus ou moins bien les stades initiaux et terminaux de cette décomposition spinodale.

c) *Application : mouvement d'une paroi de Bloch dans un ferromagnétique*

Un champ extérieur B déséquilibre les deux états $\pm M_0$. L'aimantation dans la paroi précesse autour de B, engendrant un champ démagnétisant qui à son tour fait précesser M_0 et avancer la paroi : c'est un mécanisme subtil ! La dissipation est introduite par un coefficient « de Gilbert » α dans la précession. Aux faibles champs B, on atteint un état *stationnaire* où l'aimantation est simplement inclinée : la paroi se rétrécit et sa vitesse c est proportionnelle à B. Au delà du « seuil de Walker » B_w, le champ démagnétisant ne peut plus contrer le couple de Larmor dû à B. L'aimantation précesse dans la paroi, donnant une caractéristique c (B) non linéaire très caractéristique.

Le problème se complique encore dans un échantillon épais, du fait de la fermeture des lignes de flux près des bords. Au delà d'une certaine vitesse, le mouvement de la paroi nuclée des lignes de Néel à la surface de l'échantillon, qui défilent ensuite le long de la paroi en la freinant, un peu comme les tourbillons qui créent la dissipation dans un pont supraconducteur. Ces défauts déverrouillent l'azimuth de M dans la paroi et font saturer la vitesse c à une valeur indépendante de B.

La généralisation à une bulle cylindrique est tout aussi riche. La bulle répond au gradient du champ, mais avec une déflection angulaire qui dépend de la chiralité de M dans la paroi — elle-même modifiée par d'éventuels défauts de Néel. Ces prolongements, vitaux pour les applications, n'ont été qu'effleurés.

4) *Nucléation et décomposition spinodale*

Le problème est foncièrement non linéaire, et donc difficile — il l'est même au niveau qualitatif, car l'évolution est un subtil compromis entre des tendances contradictoires — d'où l'importance d'une réflexion préliminaire approfondie.

Les difficultés sont présentes même pour un paramètre d'ordre non conservé. Dans la décomposition spinodale, par exemple, il faut situer l'état initial ϕ_o par rapport au maximum de l'énergie libre f (ϕ) (de quel côté bascule-t-on ?), puis intégrer l'effet d'une sursaturation ($f_2 - f_1$) (sensible lorsque l'échelle spatiale est supérieure au rayon de nucléation). On se heurte à des problèmes de percolation, et selon les cas on peut atteindre un état stable ou métastable — la question reste largement ouverte !

La situation est encore pire lorsque ϕ est conservé : la croissance d'une phase aux dépens de l'autre modifie la sursaturation et réagit sur l'évolution ultérieure. Dans les phases terminales, il semble que les structures suivent une *loi d'échelle*, avec un facteur de forme constant et une échelle spatiale R (t) $\sim t^n$ — encore faut-il justifier cette loi d'échelle et la raccorder aux étapes initiales ! Les réponses apportées à toutes ces questions sont très partielles.

a) *Théorie classique de la nucléation (Becker-Döring)*

Elle concerne les faibles sursaturations, avec un germe critique de rayon $R_c \gg \xi$, d'énergie $E_c \gg T$. Elle s'appuie sur une équation de Fokker Planck pour la distribution n (R) des germes de rayon R. Pour $R < R_c$, la distribution est essentiellement la distribution d'équilibre

$$n(R) = n_c \exp\left[\frac{E_c - E(R)}{T}\right]$$

On veut calculer le nombre J de germes surcritiques produits par unités de temps et de volume.

En pratique, J est contrôlé par le sommet de la barrière, et la solution de l'équation de Fokker-Planck est facile. L'information cinétique est entièrement contenue dans la loi de croissance *macroscopique* d'un germe individuel

$$\dot{R} = \lambda [R - R_c]$$

où le coefficient λ, piloté par la sursaturation, dépend du mécanisme envisagé ($\lambda \sim 1/R^2$ pour une diffusion de volume, $\lambda \sim 1/R$ pour une dissipation superficielle). La seule inconnue dans l'expression de J est le facteur multiplicatif n_c : contrairement à une opinion répandue, la difficulté du problème de nucléation est d'ordre *statique,* et non cinétique (il faut connaître l'entropie de fluctuation du germe pour calculer n_c).

b) *La théorie microscopique de Langer*

Elle s'appuie sur un modèle de Landau Ginzburg continu, que l'on discrétise en « pavant » l'espace sur une échelle $\sim \xi$ (c'est l'idée du « coarse graining »). En développant f (ϕ) au deuxième ordre en fluctuations, on calcule facilement la fonction de partition Z_0 d'un état métastable homogène. Si l'on sait calculer la fonction de partition Z_1 en présence d'un germe de rayon R, on relie facilement n (R) à Z_1/Z_0 : c'est le point de départ cherché.

Pour calculer Z_1, il faut classer les fluctuations du germe : déplacements (assurant un résultat extensif), croissance (décrite explicitement dans le calcul de Becker Döring), *déformations* : c'est là qu'est la difficulté ! En pratique, on se contente d'une approximation « capillaire », où la surface du germe est déformée sans modification du profil de paroi : encore faut-il savoir où l'on coupe les intégrales ! Le modèle est qualitativement correct, mais quantitativement incertain — ce qui est dramatique dans la mesure où les fluctuations affectent *l'exposant* E_c ! Au delà du facteur d'Arrhénius de n, le calcul du préfacteur reste donc très ambigu : le principal mérite de la théorie de Langer est de poser correctement le problème conceptuel.

c) *Phases terminales : croissance des échelles spatiales pour un paramètre d'ordre conservé*

Ce problème très riche traduit le jeu subtil de la croissance et de la sursaturation. Parmi les nombreux modèles proposés, deux semblent émerger :

— Le modèle de Lifshitz Slyozov s'intéresse à des germes dilués *immobiles*. La condensation est pilotée par les effets *capillaires*. Le rayon des gouttes reste alors voisin de R_c, ce qui implique une loi de croissance $R \sim t^{1/3}$ d'origine purement dimensionnelle (les grosses gouttes mangent les petites !). On sait en fait résoudre explicitement le problème et calculer la distribution complète $n(R/R_c)$.

— Le modèle de Binder-Stauffer ignore la capillarité, mais suppose que les gouttes peuvent diffuser et coalescer. La loi de croissance de R (t) dépend du coefficient de diffusion D (R) : si $D \sim R^{\alpha}$, on obtient $R \sim t^{1/(2-\alpha)}$. Divers mécanismes ont été proposés, conduisant à des valeurs différentes de α.

En pratique, les deux mécanismes coexistent, et on peut passer de l'un à l'autre au cours du temps (un tel « crossover » est souvent observé expérimentalement). Si l'on ajoute à cela la possibilité de transport convectif dans une matrice fluide (Siggia), on a un problème très riche qui est loin d'être complètement éclairci.

Ce cours a fait l'objet de notes détaillées qui ont été distribuées à l'auditoire.

II. *INSTABILITÉS ET BIFURCATIONS DANS LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES*

Dans ce domaine très vaste, seuls ont été étudiés les systèmes *discrets*. Dans ce cadre restreint nous nous sommes limités aux bifurcations élémentaires d'attracteurs simples, sans rentrer dans l'univers des cascades et des attracteurs étranges. L'objectif était d'illustrer des idées générales sur des exemples concrets, en restant à un niveau très qualitatif.

1) *Un exemple simple : systèmes à une dimension*

On retrouve la diode tunnel et la lampe fer hydrogène du cours précédent, mais aussi bien d'autres systèmes, telle la réaction chimique de Schlögl. Les bifurcations élémentaires évoquent une transition de phase (point spinodal, point critique), et l'on retrouve les concepts familiers de multistabilité, d'hystérésis, de palier de Maxwell. Une extension intéressante est la cinétique de la bifurcation spinodale lorsqu'on balaie le paramètre de contrôle avec une vitesse u : les temps caractéristiques varient comme $u^{-1/3}$. A signaler le comportement anormal lorsque l'équation de mouvement est multivaluée : c'est l'indice d'une oscillation de relaxation — il faut élargir l'espace des phases.

2) *Systèmes déterministes multidimensionnels*

Ils se caractérisent par un réseau de trajectoires — le « portrait de phase » — avec contraction irréversible des aires lorsque le système est dissipatif. Les états stationnaires correspondent à des *points fixes,* que l'on peut classer d'après leur stabilité linéaire : nœuds, points col, foyers. Chaque point fixe a son « bassin attracteur ».

En deux dimensions, la condition d'unicité interdit le croisement de deux trajectoires — d'où une contrainte très stricte. Les bassins attracteurs sont limités par des « séparatrices », qui aboutissent à des points col. Ces concepts généraux ont été illustrés par de nombreux exemples : dynamos autoexcitatrices montées en parallèle — régulateur à boules de Watt (dont la stabilité implique un amortissement suffisant, comme dans tous les servomécanismes) — dynamo unipolaire qui « accroche » au délà d'un couple critique — réactions chimiques couplées (Brusselator). Une application inattendue à un système conservatif est le problème proie-prédateur de Lotka-Volterra.

a) *Cycles limites en deux dimensions*

Les bifurcations dans ce cas d = 2 sont très simples. La limite spinodale correspond à la coalescence d'un nœud et d'un col, le point critique à la coalescence de trois points fixes. La seule nouveauté est la *bifurcation de Hopf,* où un foyer stable devient instable par émission d'un *cycle limite* (c'est la naissance d'une oscillation spontanée). L'exemple typique est l'oscillateur de Van der Pol.

La description classique d'un tel cycle limite est la section de Poincaré, où l'on suit les intersections successives de la trajectoire avec une demi-droite issue du foyer : le cycle limite est un point fixe de cette application discrète. On peut ainsi caractériser la stabilité du cycle et ses bifurcations dans un langage « géométrique ». Un cas intéressant est l'apparition d'une paire de cycles limites, l'un stable et l'autre instable, analogue à la bifurcation nœud-col. Au voisinage de cette transition, le système hésite et présente une longue bouffée d'oscillation.

Il est facile de rendre cette discussion quantitative. Au voisinage de la bifurcation de Hopf, un développement en série donne l'amplitude de l'oscillation. Une fois le cycle développé, sa stabilité linéaire est caractérisée par un « exposant de Floquet » (solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques). Il est plus difficile de situer le cycle dans une structure globale : c'est le cas par exemple des bifurcations d'Andronov et de Leontovich, où un cycle limite naît à partir d'une séparatrice.

b) *Attracteurs en trois dimensions*

La contrainte de non-croisement disparaît, et le problème est infiniment plus riche, pouvant conduire jusqu'à un comportement chaotique.

Les exemples concrets en d = 3 abondent — et par delà leur diversité ils ont des traits communs frappants. Deux dynamos unipolaires croisées, par exemple, peuvent engendrer du chaos. Un laser monomode est un système à trois degrés de liberté (champ électrique et moment dipolaire alternatifs, inversion des populations), dont la bifurcation est pilotée par la puissance de pompage. L'instabilité convective de Rayleigh-Bénard est souvent modélisée par un « modèle de Lorenz » où l'on conserve seulement deux modes de température et un mode d'écoulement. Une modélisation analogue s'applique à la dynamo terrestre, où la convection du noyau conducteur engendre une instabilité électrique, qui à son tour réagit sur la convection : le champ d'application est vaste.

En $d = 3$, la section de Poincaré est une application dans le *plan* P. Un cycle limite est un point fixe de cette application (où une permutation cyclique de points fixes si la trajectoire coupe le plan plusieurs fois). Si la section de Poincaré décrit une *courbe* dans le plan P, la trajectoire s'inscrit sur un *tore,* nouveau type d'attracteur : le tore sera entièrement balayé si les deux fréquences correspondantes sont *incommensurables.* Si enfin la section de Poincaré couvre une *aire* finie du plan, on a un « attracteur étrange », dont le comportement est imprévisible aux grands temps.

Pour mettre un peu d'ordre dans cette zoologie de comportements, il faut partir du cycle limite simple et préciser ses divers types d'instabilités, caractérisées par deux exposants de Floquet λ_1 et λ_2 : le cycle est instable si $|\lambda_i|^2 > 1$ — d'où trois scénarios possibles :

— L'un des λ passe par $+ 1$: c'est la bifurcation nœud col où le cycle stable s'annihile avec un collègue instable. La trajectoire « traîne » très longtemps au voisinage de cette paire, et finit par s'éloigner. En trois dimensions, on peut la réinjecter à l'entrée (par exemple en l'inscrivant sur un tore) : on a alors *intermittence,* avec de longues périodes d'oscillation régulière séparées par des bouffées désordonnées (la réinjection).

— L'un des λ passe par $- 1$: le cycle se dédouble avec doublement de la période. Cette bifurcation *sous harmonique* est le premier stade d'une cascade classique vers le chaos.

— Deux λ complexes conjugués traversent le cercle unité : il apparaît *une deuxième fréquence* et la trajectoire s'inscrit sur un *tore.* Si les deux fréquences sont de rapport x irrationnel, on balaie tout le tore — sinon on a un cycle limite démultiplié. En pratique, les termes non linéaires de l'équation de récurrence tendent à verrouiller x sur un rationnel : chaque x rationnel a une *plage de stabilité* finie (modèle d'Arnold), et le diagramme de bifurcation est extrêmement complexe (« escalier du diable »).

Les points fixes, cycles limites et tores limites constituent des attracteurs « normaux » pour $d = 3$. La relaxation correspondante est caractérisée par des exposants de Lyapounov négatifs. (Bien sûr, la phase le long du cycle ou du tore est flottante : les exposants de Lyapounov sont du type $(-, -, -)$,

(−, −, 0), (−, 0, 0) respectivement pour un point fixe, un cycle, un tore). La nouveauté en d = 3 est la possibilité *d'attracteurs étranges,* de signature (−, 0, +) : on perd toute mémoire des conditions initiales dans une direction, sans pour autant contredire la loi de contraction des aires, puisque les trajectoires se resserrent dans l'autre direction. Une telle structure implique un « pincement » et un « repliement » des trajectoires subtils, conduisant à une structure fractale : ces développements n'ont pas été abordés.

3) *Systèmes dégénérés : oscillations de relaxation*

La solution explicite d'un système non linéaire est en général impossible — sauf quand on peut séparer deux échelles de temps, l'une lente, l'autre brutale. Un exemple typique est un circuit électrique (diode tunnel, arc électrique) avec une capacité ou une self parasites. On est tenté de négliger cet élément a priori petit : on ôte alors une dimension au problème, la variable rapide étant *asservie* à la variable lente. Encore faut-il s'assurer que ladite variable rapide ne bascule pas brutalement lorsqu'elle est multistable : à tronquer le problème, on risque de perdre des *oscillations de relaxation.* D'où l'intérêt des « systèmes dégénérés » où l'écart entre échelles de temps est très grand.

En pratique, le mouvement rapide se fait à *variables lentes gelées* ; il évolue vers l'attracteur le plus proche — disons un point fixe stable. Les variables rapides sont alors *ancrées* aux variables lentes, qui évoluent progressivement. Cette « trajectoire lente » peut se terminer à un point fixe, ou bien poursuivre jusqu'à une bifurcation du mouvement rapide. On a alors *échappement* : la variable rapide bascule vers une autre position d'équilibre. (Il suffit de penser à l'échappement à ancre d'une montre !). Lorsque les échelles de temps sont bien séparées (rapport $\epsilon \ll 1$), on peut décrire le détail de cet échappement analytiquement : la discontinuité est en fait arrondie sur un temps $\sim \epsilon^{2/3}$.

Lorsque le système a échappé, les possibilités sont diverses. On peut rejoindre une autre branche de la caractéristique lente, dériver jusqu'à un second basculement et revenir au point de départ : on a alors l'oscillation de relaxation typique du genre *« flip-flop »*, avec des tronçons lents alternés séparés par des « discontinuités » de durée $\sim \epsilon$. Une autre possibilité est un échappement non borné par le mouvement lent : on a alors une excursion de grande amplitude, sur un temps $\sim \sqrt{\epsilon}$: la caractéristique se présente comme une oscillation lente avec des *pics déclenchés.* Si enfin la trajectoire lente est parallèle au mouvement rapide, celui-ci n'atteint jamais son point fixe : on a un comportement pathologique où on ne peut plus séparer deux échelles de temps : le système présente des oscillations très allongées de période $\sim \sqrt{\epsilon}$.

On peut généraliser toute cette analyse au cas d > 2. Avec une variable lente et deux variables rapides *conservatives,* on peut par exemple avoir une oscillation (rapide) dont l'amplitude est « pompée » par le mouvement lent (développement « adiabatique »). Plutôt qu'une énumération fastidieuse, le cours n'a creusé qu'un seul exemple, qui pourrait modéliser les retournements du champ magnétique terrestre. Dans ce modèle anormal, une variable rapide unique (l'écoulement convectif) relaxe parallèlement au « plan lent » défini par deux variables électromagnétiques — d'où une oscillation rapide de période $\sim \sqrt{\epsilon}$, dont l'amplitude s'annule sur une *courbe lente.* Parmi les nombreux régimes possibles, il en est un de *relaxation déclenchée,* où le système bascule brutalement d'un côté à l'autre de la courbe lente, en déclenchant à chaque fois un train d'oscillations rapides. Ce comportement est réminiscent des faits observés, avec les bons ordres de grandeur — mais bien sûr il est spéculatif. On peut pousser le calcul analytique assez loin, soit en développant en amplitude d'oscillation, soit en traitant la dérive lente comme un petit paramètre (le mécanisme de basculement est alors très transparent).

4) *Fluctuations dans les systèmes non linéaires*

C'est là un aspect beaucoup moins étudié et pourtant très riche. Les idées essentielles émergent déjà d'un modèle à une seule dimension x, que l'on peut décrire soit par une équation de Langevin (avec un bruit blanc), soit par une équation de Fokker Planck (avec un coefficient de diffusion D de la variable x). Si les fluctuations sont faibles, on obtient des équations séparées pour l'évolution déterministe de la moyenne x et pour la régression de la variance σ

$$\dot{x} = f(x) \qquad , \dot{\sigma} = 2f'\sigma + 2D$$

$\dot{\sigma}$ est un compromis entre une source de bruit D et une relaxation macroscopique pilotée par f'. Près d'un équilibre stable, $f' < 0$ donne l'amplitude des fluctuations $\sigma_0 = D/|f'|$. Si l'équilibre est thermodynamique, σ_0 est la distribution de Boltzmann et l'on retrouve la relation d'Einstein entre D et $|f'|$: cette relation est *fausse* pour un point fixe dissipatif. Plus généralement, σ est piloté par l'évolution du x moyen. On peut ainsi décrire la croissance transitoire des fluctuations lors d'une bifurcation (si on balaie cette bifurcation à la vitesse u, on déclenche des fluctuations $\sigma \sim u^{-5/3}$).

a) *Systèmes multidimensionnels*

σ devient une *matrice* carrée de dimension d, dont l'excentricité traduit la polarisation des fluctuations. Par construction, D est une matrice symétrique — mais $\gamma_{ij} = -\partial f_i/\partial x_j$ ne l'est en général pas. La situation est de ce fait compliquée sauf si l'on fait une hypothèse supplémentaire de *réversibilité microscopique* (invariance par renversement du temps). Cette hypothèse, combinée avec la distribution du Boltzmann *près de l'équilibre thermodynamique,* conduit aux *relations d'Onsager,* dont la validité est ainsi strictement délimitée.

Comme prévu, les fluctuations divergent près d'une bifurcation, dans une seule direction dans le cas « nœud-col », de façon isotrope pour une bifurcation de Hopf. Pour un cycle limite, les fluctuations perpendiculaires sont finies (compromis entre la relaxation et le bruit). En revanche, il n'y a pas de force de rappel pour les fluctuations parallèles : la « phase » diffuse librement. On peut donc calculer le temps de cohérence T_2 sur lequel la mémoire de phase se perd : T_2 est d'autant plus long que le cycle est grand (il devient comparable au temps de relaxation lorsque le cycle se réduit à un foyer).

b) *Fluctuations et multistabilité*

La *durée de vie* d'un état métastable se calcule à partir de l'équation de Fokker-Planck. Elle suit une loi d'Arrhénius habituelle. En égalant les probabilités de transition (1, 2) et (2, 1) on positionne un palier de Maxwell. (La généralisation au cas multidimensionnel n'est pas triviale, car il faut identifier le « chemin réactionnel » optimum pour passer de 1 à 2).

La *décomposition spinodale* à partir d'un état instable (trempe instantanée) est un problème plus délicat. Sa solution s'appuie sur une loi d'échelle due à Suzuki. L'idée est de raccorder deux solutions qui ont une plage de validité commune :

— une étape initiale harmonique où l'on peut développer f(x) et résoudre l'équation de Fokker-Planck exactement,

— une étape « déterministe » où le terme de dérive est devenu prédominant sur les fluctuations.

On peut ainsi calculer le temps de basculement et les probabilités P_1 et P_2 des deux états finaux en fonction de l'asymétrie initiale. On peut même généraliser le calcul à une bifurcation de vitesse finie : l'approximation de Suzuki reste valable si la trempe est suffisamment rapide. Une analyse semblable permet de décrire le déclenchement d'une oscillation par le bruit lors d'une bifurcation de Hopf.

Faute de temps, cette dimension « stochastique » des phénomènes non linéaires n'a pas pu être approfondie : elle reste un élément important qu'il ne faut pas oublier.

P.N.

ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES

1. P. NOZIÈRES anime le groupe de Physique Théorique de l'Institut Laue-Langevin à Grenoble. Le groupe comporte une dizaine de physiciens confirmés qui y effectuent des séjours de durée limitée, de un à cinq ans, et

travaillent dans des domaines très divers. En 1986, l'activité portait sur les domaines suivants :

Supraconducteurs, fermions lourds, valences intermédiaires (CAPELLMANN, THALMEIER, RODRIGUEZ).

Chaînes magnétiques quantiques (SOLYOM).

Systèmes désordonnés et localisation (GREMPEL).

Liquides : défauts dans les nématiques (SCHOPOHL, SLUCKIN), parois dans ^{3}He superfluide (SCHOPOHL), phases amphiphiles (MAGGS).

2. L'activité personnelle de P. NOZIÈRES concerne les thèmes suivants :

Croissance cristalline

Croissance des facettes par diffusion des atomes le long de la surface. Thermodynamique d'un interface solide liquide. Avec F. GRANER et R. BOWLEY nous étudions actuellement les expériences récentes sur ^{3}He : mobilité de l'interface, influence de la température et résistance Kapitza, facettage sous croissance, etc.

Publications

P. NOZIÈRES, « On the motion of steps on a vicinal surface », *Journal de Physique, 48,* 1605-1608 (1987).

P. NOZIÈRES, « Liquid and solid helium : a probe of condensed matter phenomena », *Physica Scripta, T19,* 589 (1987).

P. NOZIÈRES, D. WOLF, « Interfacial properties of elastically strained materials : I) Thermodynamics of a planar interface », *Zeitschrift für Physik, 70,* 399 (1987).

D. WOLF, P. NOZIÈRES, « Interfacial properties of elastically strained materials : II) Mechanical and melting equilibrium of a curved interface, *Zeitschrift für Physik, 70,* 507 (1988).

Rhéologie des suspensions

La réflexion s'oriente vers l'étude des suspensions sous couple appliqué (définition du tenseur d'efforts, etc.).

Publications

P. NOZIÈRES, « A local coupling between sedimentation and convection : application to the Beenakker-Mazur effect », *Physica, 147A,* 219 (1987).

Magnétisme itinérant (avec W. SCHIRMACHER)

L'existence des termes en M^4 Log M dans l'énergie libre a été confirmée, avec des conséquences inattendues sur l'analyticité du développement de perturbations.

3. Outre cette activité centrée à Grenoble, un petit groupe travaille au Collège même, autour de D. SAINT-JAMES, en étroite collaboration avec C. ASLANGUL et N. POTTIER, tous deux membres du groupe de Physique des Solides de l'E.N.S. Leurs travaux récents développent l'étude du *mouvement brownien quantique* dans un réseau désordonné de liaisons fortes : l'idée est de comprendre la compétition entre le désordre dû au bruit et le désordre dû au réseau sous-jacent.

On peut démontrer que, dans l'approximation de Born, la matrice densité de la particule obéit à une équation maîtresse généralisée retardée en temps et qui ne couple que les éléments diagonaux. On notera que cette forme dérive d'un calcul microscopique direct et non de considérations phénoménologiques comme c'est généralement le cas.

Dans ce genre de problème on distingue deux types de réseaux :

— le type i) pour lequel le premier moment de la distribution des taux de transfert Δ_n^2 est fini ;

— le type ii) pour lequel la probabilité des faibles taux de transfert est très grande.

Pour les réseaux de type (i), à $T = 0$ et dans un modèle ohmique, on montre que le désordre n'affecte pas le seuil de localisation. Pour le type (ii), en revanche, le déplacement de la particule aux grands temps est du type $< q^2 > \sim t^\lambda$, où λ dépend du désordre : la diffusion pure est l'exception.

Le problème reste cependant en partie ouvert, car il se pourrait que le calcul de perturbation au second ordre de l'approximation de Born ne soit pas justifié au zéro absolu : la question est toujours à l'étude.

Publications

C. ASLANGUL, N. POTTIER, D. SAINT-JAMES, « Quantum brownian motion in a periodic potential : a pedestrian approach, *J. Physique, 48,* 1093-1110 (1987).

C. ASLANGUL, N. POTTIER, D. SAINT-JAMES, « Quantum dynamics of a dissipative free particle », *Phys. Lett., A123,* 413 (1987).

C. ASLANGUL, N. POTTIER, D. SAINT-JAMES, « Quantum dynamics of a damped free particle », *J. Physique, 48,* 1871-1880 (1987).

C. ASLANGUL, N. POTTIER, D. SAINT-JAMES, « Quantum dissipation : dynamics of a particle in a symmetric double well in the presence of non-ohmic friction », *Physica A, 149,* 535 (1988).

CONFÉRENCES DONNÉES PAR P. NOZIÈRES

Lumbin, 16 septembre 1987, Groupe Français de Croissance Cristalline, Grenoble, 25 mars 1988. « Aspects statiques et dynamiques de la transition rugueuse ».

Université de Chicago, 9 mai 1988, « Some comments on the flow of suspensions : sedimentation *vs* convection » ; 12 mai 1988, « The roughening transition » ; 16 mai 1988, « The Moryia theory of weak ferromagnetism revisited » ; 16 mai 1988, « Introduction to magnetic bubbles ».

Bell Laboratories, 19 mai 1988, « The roughening transition of ^{4}He and ^{3}He crystals ».