Théorie des groupes

Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année avait pour titre : *Formes et sous-groupes des groupes algébriques simples sur les corps et les corps locaux : diagrammes et classifications*.

1. *Corps quelconques*

Cette première partie du cours était basée sur l'article *Classification of Algebraic Semisimple Groups, Proc. Symp. Pure Math.* 9 (1966) (actes d'une école d'été tenue à Boulder en août 1965), pp. 33-62 ; cet article est noté [B] ci-après. L'objectif principal a été de compléter et d'établir la « classification des indices » donnée dans [B] sans démonstration ; cela a été l'occasion de préciser les résultats généraux de [B] et d'en simplifier les démonstrations ainsi que celles (non publiées) des tables constituant la classification en question.

1.1 *Diagrammes de Dynkin*

Soit k un corps, $\tilde{k}$ une clôture séparable de k et G un groupe semi-simple défini sur k. Nous désignons par $\Delta = \Delta(G)$ le *diagramme* (ou *graphe*) *de Dynkin* « absolu » (i.e., rendu indépendant, par le procédé habituel, du choix d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel le contenant) du groupe G et aussi, par abus de notations, l'ensemble de ses sommets. Si T est un $\tilde{k}$ -tore maximal de G et B un sous-groupe de Borel contenant T, et si $\Phi(G,T)$ désigne le système des racines de G relatif à T, Δ s'identifie canoniquement à la base $\Delta(G,T,B)$ de $\Phi(G,T)$ correspondant à B. Pour $a,b \in \Delta$, identifié à $\Delta(G,T,B)$, on pose $g(a,b) = a(b^\vee)$, où $b^\vee$ est la coracine correspondant à b. Les entiers $g(a,b)$ sont fournis par le diagramme Δ selon la convention habituelle :

$g(a,b) =$	0	1	2	3
$g(b,a) =$	0	1	1	1

Si G est quasi-simple, tout cela reste valable *mutatis mutandis* pour le *diagramme de Dynkin complété*, noté $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(G)$. On a $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{a_0\}$ où, moyennant l'identification de Δ à $\Delta(G,T,B)$, a_0 correspond à l'opposée de la racine dominante.

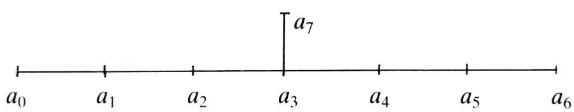
1.2. *Les groupes* $\tilde{C}(\Delta)$, $\tilde{C}^{\vee}(\Delta)$ *et* $C^*(\Delta)$

Supposons G absolument presque simple. Des algorithmes commodes, décrits dans le cours, permettent de déduire de Δ et $\bar{\Delta}$ de nombreux renseignements sur G. Les plus importants peuvent s'obtenir par l'intermédiaire des groupes abéliens $\tilde{C}(\Delta)$ et $\tilde{C}^{\vee}(\Delta)$ décrits par les présentations suivantes : ces groupes sont dotés d'applications distinguées $\tilde{\gamma} : \bar{\Delta} \to \tilde{C}(\Delta)$, $\tilde{\gamma}^{\vee} : \bar{\Delta} \to \tilde{C}^{\vee}(\Delta)$, ils sont engendrés par les images de ces applications et « définis par » les relations

$$2\,\tilde{\gamma}(a) = \Sigma\,\{g(a,b)\cdot\tilde{\gamma}(b) \mid b \in \bar{\Delta} - \{a\}\} \qquad (a \in \bar{\Delta}),$$

$$2\,\tilde{\gamma}^{\vee}(a) = \Sigma\,\{g(b,a)\cdot\tilde{\gamma}^{\vee}(b) \mid b \in \bar{\Delta} - \{a\}\} \qquad (a \in \bar{\Delta}).$$

Les seconds membres de ces relations ne font intervenir que les sommets de $\bar{\Delta}$ voisins de a ; comme $\bar{\Delta}$ est un arbre ou un simple cycle, cela rend la détermination explicite de $\tilde{C}(\Delta)$ et $\tilde{C}^{\vee}(\Delta)$ très facile. Par exemple, si G est de type E_7, d'où

$\bar{\Delta} =$  ,

on trouve aussitôt que le groupe $\tilde{C}(\Delta) = \tilde{C}^{\vee}(\Delta)$ est produit direct d'un groupe libre de rang 1 engendré par $x = \tilde{\gamma}(a_0)$ et d'un groupe d'ordre 2 engendré par $\varepsilon = \tilde{\gamma}(a_0) - \tilde{\gamma}(a_6)$, et l'on a $\tilde{\gamma}(a_0) = \tilde{\gamma}(a_6) + \varepsilon = x$, $\tilde{\gamma}(a_1) = \tilde{\gamma}(a_5) = \tilde{\gamma}(a_7) + \varepsilon = 2x$, $\tilde{\gamma}(a_2) = \tilde{\gamma}(a_4) + \varepsilon = 3x$, $\tilde{\gamma}(a_3) = 4x$.

Voici deux applications de ces définitions.

Il existe un unique homomorphisme de $\tilde{C}^{\vee}(\Delta)$ dans $\mathbf{Z}$ qui applique $\tilde{\gamma}(a_0)$ sur 1. Si l'on note $c(a)$ l'image de $\tilde{\gamma}(a)$ $(a \in \bar{\Delta})$ par cet homomorphisme, on a $\Sigma\{c(a)\cdot a \,|\, a \in \bar{\Delta}\} = 0$ (autrement dit, les $c(a)$ pour $a \in \Delta$ sont les « coefficients des racines simples dans la racine dominante »), la somme

$\Sigma\{c(a) \mid a \in \Delta\} = h(G)$ est le nombre de Coxeter de G et $(h(G) + 1)$. CardΔ est sa dimension.

Le quotient $C^*(\Delta) = \tilde{C}(\Delta)/\langle\tilde{\gamma}(a_0)\rangle$ est appelé *cocentre* de Δ et l'on note γ^* : $\bar{\Delta} \to C^*(\Delta)$ le composé de $\tilde{\gamma}$ et de la projection canonique $\tilde{C}(\Delta) \to C^*(\Delta)$. Si G est simplement connexe, son centre est canoniquement isomorphe sur $\tilde{k}$ à Hom $(C^*(G),\mathbf{Mult})$, où **Mult** désigne le groupe multiplicatif (il s'agit même d'un k-isomorphisme si l'on fait de $C^*(\Delta)$ un k-groupe à l'aide de l'opération naturelle de Gal $(\tilde{k}/k)$ sur celui-ci : voir ci-dessous). Par exemple, si Δ est de type E_7 et si l'on reprend l'indexation de ce diagramme choisie plus haut, on a $\gamma^*(a_1) = \gamma^*(a_2) = \gamma^*(a_5) = 1$ et $\gamma^*(a_4) = \gamma^*(a_6) = \gamma^*(a_7)$ est d'ordre 2 et engendre $C^*(\Delta)$.

1.3. *Les invariants* β_a

Conservons l'hypothèse de presque simplicité de G sur $\tilde{k}$. Le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}\ (\tilde{k}/k)$ opère de façon évidente sur Δ, $\bar{\Delta}$, $\tilde{C}(\Delta)$, ... Lorsqu'un groupe Ξ opère sur un ensemble X, nous notons X^{Ξ} l'ensemble des points de X fixés par Ξ. A tout élément y du groupe $C^*(\Delta)^{\Gamma}$ est naturellement associé un élément $\beta_G(y) = \beta(y)$ du groupe de Brauer Br k de k. Si la caractéristique de k ne divise pas l'ordre de $C^*(\Delta)$, on le définit très simplement de la façon suivante. Supposons G simplement connexe (s'il ne l'était pas, il suffirait de le remplacer par un revêtement universel). Soit G_{qd} le groupe quasi-déployé simplement connexe ayant même diagramme de Dynkin que G avec même action de Γ. Son centre s'identifie *canoniquement* avec le centre $C = C(G) = \mathrm{Hom}\,(C^*(\Delta),\mathbf{Mult})$ de G. Soit $\bar{G}_{\mathrm{qd}}$ le groupe adjoint de G_{qd} et δ : $H^1(\Gamma,\bar{G}_{\mathrm{qd}}(\tilde{k})) \to \mathrm{H}^2(\Gamma,C)$ le cobord de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte

$$\{1\} \to C \to G_{\mathrm{qd}} \to \bar{G}_{\mathrm{qd}} \to \{1\}.$$

Le groupe G s'obtient en tordant G_{qd} par un cocycle à valeurs dans $\bar{G}_{\mathrm{qd}}(\tilde{k})$, cocycle dont nous notons η la classe de cohomologie. Finalement, $\beta(y)$ est l'image de $\delta\eta$ par y_* : $H^2(\Gamma,C) \to H^2(\Gamma,\tilde{k}^\times) = \mathrm{Br}\ k$ (rappelons que y définit un Γ-homomorphisme de C dans $\tilde{k}^\times$).

On obtient une définition valable en toute caractéristique en montrant qu'à tout élément y de $C^*(\Delta)^{\Gamma}$, on peut associer naturellement une extension centrale $\{1\} \to \mathbf{Mult} \to H(y) \to \bar{G} \to \{1\}$ (où $H(y)$ est un certain k-groupe réductif) ; $\beta(y)$ est alors défini comme l'image de η par le cobord $H^1(\Gamma,\bar{G}_{\mathrm{qd}}(\tilde{k})) \to H^2(\Gamma,\tilde{k}^\times) = \mathrm{Br}\ k$ de la suite exacte de cohomologie associée à cette extension.

L'application β_G : $C^*(G)^{\Gamma} \to \mathrm{Br}\ k$ est un homomorphisme. Pour tout corps l intermédiaire entre k et $\tilde{k}$, on pose $\Gamma(l) = \mathrm{Gal}\ (\tilde{k}/l)$, et l'on définit de même un homomorphisme canonique $C^*(G)^{\Gamma(l)} \to \mathrm{Br}\ l$, que nous notons β_l ou $\beta_{G,l}$.

Pour $a \in \Delta$, on désigne par k_a ou $k(a)$ le corps des points fixes du stabilisateur de a dans Γ et par $\beta_{G,a}$ ou β_a l'élément $\beta_{k(a)}(\gamma^*(a))$ de Br k_a.

Soit $\Delta^{\min}$ (resp. $\bar{\Delta}^{\min}$) l'ensemble de tous les éléments a de Δ (resp. $\bar{\Delta}$) tels que $c(a)$ (défini en 1.2) soit égal à 1. On sait que γ^* définit une bijection de $\bar{\Delta}^{\min}$ sur $C^*(\Delta)$, évidemment compatible avec les actions de Γ. Il s'ensuit que la donnée des $\beta_a \in \mathrm{Br}\, k_a$ pour $a \in \Delta^{\min}$ (et *a fortiori* la donnée de tous les β_a) détermine l'homomorphisme β_l pour tout l, $k \subset l \subset \tilde{k}$.

Etant donnés k, $\tilde{k}$ et un diagramme de Dynkin Δ sur lequel opère Γ = Gal $(\tilde{k}/k)$, nous dirons, indépendamment du choix préalable d'un groupe G, qu'un système d'éléments $\beta_a \in \mathrm{Br}\, k_a$ pour $a \in \Delta$ ou pour $a \in \Delta^{\min}$ est *admissible* s'il existe un groupe G correspondant aux données en question tel que les β_a soient ses invariants $\beta_{G,a}$. Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est l'existence d'un système d'homomorphismes $\beta_l : C^*(G)^{\Gamma(l)} \to \mathrm{Br}\, l$ $(k \subset l \subset \tilde{k})$ compatible, en un sens évident, avec les extensions de corps et tel que $\beta_a = \beta_{k(a)}(\gamma^*(a))$ pour tout a, mais cette condition n'est pas suffisante. Supposons par exemple que Δ soit de type E_7 et reprenons les notations du n° 1.2. Un système de β_a satisfait à la condition précédente si et seulement s'il est de la forme $\beta_{a_1} = \beta_{a_2} = \beta_{a_3} = \beta_{a_5} = 0$, $\beta_{a_4} = \beta_{a_6} = \beta_{a_7} = \beta_0$, où β_0 est un élément de Br k tel que $2\,\beta_0 = 0$. Cependant, il est facile de voir, à l'aide des résultats du numéro suivant, que ce système n'est pas admissible si l'algèbre à division D représentant β_0 est de dimension $\geqslant 2^6$ (on peut voir que si $\dim D \leqslant 2^4$ le système est admissible, mais j'ignore ce qu'il en est pour $\dim D = 2^6$).

Abandonnant l'hypothèse que G est presque simple, on peut encore, pour $a \in \Delta$, définir le corps k_a comme ci-dessus, puis l'invariant β_a en se restreignant au facteur quasi-simple de G « contenant a », lequel est défini sur k_a.

1.4. *Représentations linéaires. Une autre approche des* $\beta_{G,a}$

Supposons G simplement connexe (mais non nécessairement presque simple). Le *réseau des poids* de Δ est défini comme un groupe abélien libre Λ doté d'une base $(\varpi_a)_{a\in\Delta}$ indexée par Δ (les ϖ_a sont les « poids fondamentaux »). Tout choix de la paire B, T du n° 1.1 détermine une identification de Λ avec le groupe des caractères de T. Le groupe Γ opère sur Λ de façon évidente. On pose $\Lambda^+ = \Sigma\{\mathbf{N}\ \varpi_a \mid a \in \Delta\}$; c'est l'ensemble des *poids dominants*, A tout $\lambda \in \Lambda^+$ correspond une représentation linéaire irréductible de G définie sur $\tilde{k}$. Si $\lambda \in \Lambda^\Gamma$, cette représentation se réalise sur k comme une représentation dans le groupe multiplicatif d'une algèbre simple centrale dont la classe de similitude, élément de Br k, est notée $\hat{\beta}_G(\lambda)$. L'application $\hat{\beta}_G : (\Lambda^+)^\Gamma \to \mathrm{Br}\, k$ s'étend en un homomorphisme de Λ^Γ dans Br k que nous notons aussi $\hat{\beta}_G$ ou $\hat{\beta}$. Par extension à tout corps l intermédiaire entre k et $\tilde{k}$, on définit de même un homomorphisme $\hat{\beta}_{G,l} = \hat{\beta}_l : \Lambda^{\Gamma(l)} \to \mathrm{Br}\, l$.

Si $a \in \Delta^{\Gamma}$, on a $\beta_a = \hat{\beta}(\varpi_a)$. Cela donne une interprétation, souvent commode, des β_a en termes de représentations linéaires de G, et ceci *pour tout* $a \in \Delta$: il suffit en effet d'étendre le corps de base à k_a. Réciproquement, le système des β_a détermine $\hat{\beta}$ (donc aussi les $\hat{\beta}_l$, car on peut montrer que si $a \in \Delta$, l'image par $\hat{\beta}$ de la somme des éléments de l'orbite $\Gamma\varpi_a$ de Γ est l'image de β_a par la corestriction $\mathrm{Cores}_{k(a)/k} : \mathrm{Br}\, k_a \to \mathrm{Br}\, k$.

1.5. *Sous-groupes paraboliques. Un « théorème de Witt »*

Dans toute la suite du § 1, on supposera G simplement connexe (ce n'est d'ailleurs, le plus souvent, qu'une hypothèse de commodité). Soient P un k-sous-groupe parabolique de G, B un sous-groupe de Borel de P, T un tore maximal de B, L le sous-groupe de Levi de P contenant T, L' le groupe dérivé de L, et Θ l'ensemble des éléments a de Δ, identifié à $\Delta(G,T,B)$ (cf. 1.1), tels que le sous-groupe radiciel de G correspondant à la racine $-a$ soit contenu dans L. L'ensemble Θ (resp. $\Delta - \Theta$) est appelé le *type* (resp. le *cotype*) de P. Le diagramme de Dynkin de L s'identifie avec le sous-diagramme de Δ dont les sommets sont les éléments de Θ, sous-diagramme noté aussi Θ.

Supposons maintenant P et T, donc aussi L, définis sur k. Le théorème suivant dit en substance que le système formé de Δ (muni de l'action de Γ), Θ et L' détermine le groupe G à k-isomorphisme près.

THÉORÈME 1. — *Soient G_1 un k-groupe semi-simple simplement connexe, Δ_1 son diagramme de Dynkin, P_1 un k-sous-groupe parabolique de type $\Theta_1 \subset \Delta_1$, T_1 un k-tore maximal de P_1, L_1' le groupe dérivé du sous-groupe de Levi de P_1 contenant T_1, $\delta : \Delta \to \Delta_1$ un isomorphisme de diagrammes de Dynkin compatible avec les actions de Γ sur Δ et Δ_1 et tel que $\varphi(\Theta) = \Theta_1$, et enfin $\lambda : L' \to L_1'$ un k-isomorphisme induisant l'isomorphisme $\delta|_{\Theta}$ du diagramme de Dynkin de L' sur celui de L_1'. Alors il existe un k-isomorphisme $\alpha : G \to G_1$ induisant δ, tel que $\alpha(P) = P_1$, $\alpha(T) = T_1$, d'où $\alpha(L') = L_1'$, et $\alpha|_{L'} = \lambda$.*

Cela résulte par un raisonnement de cohomologie galoisienne simple du lemme suivant, lui-même facile.

LEMME. — *Dans un k-groupe semi-simple adjoint, le centre d'un k-sous-groupe de Levi d'un k-sous-groupe parabolique quelconque est un produit direct de tores induits (donc est cohomologiquement trivial).*

1.6. *Une condition nécessaire et suffisante d'existence de G*

Les raisonnements de cohomologie galoisienne prouvant le théorème 1 fournissent également une condition nécessaire et suffisante pour que, étant donné Δ (avec action de Γ), Θ ($\subset \Delta$) invariant par Γ et un k-groupe semi-simple simplement connexe L' de diagramme de Dynkin Θ, ces données déterminent effectivement un groupe G. Pour $a \in \Theta$, notons $\varpi_a^{(L')}$ le poids fondamental de L' correspondant à a et, pour $b \in \Delta - \Theta$, posons $\varpi_\Theta(b) = -\Sigma\{g(b,a) \cdot \varpi_a^{(L')} \mid a \in \Theta\}$. On a alors la

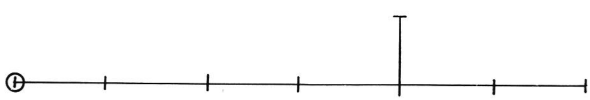
PROPOSITION 1. — *Le groupe G existe si et seulement si, pour tout $b \in \Delta - \Theta$, on a $\hat{\beta}_{L',k(b)}(\varpi_\Theta(b)) = 0$, autrement dit, si la représentation linéaire de poids dominant $\varpi_\Theta(b)$ de L' est « définie sur $k(b)$ ».*

1.7. *Indices*

Soit $\Delta_0 = \Delta_0(G)$ le type d'un k-sous-groupe parabolique minimal de G (rappelons que ces sous-groupes sont tous conjugués par des éléments de $G(k)$). Le système $(\Delta,\Gamma \to \mathrm{Aut}\Delta,\Delta_0)$ est appelé l'*indice* de G. Le groupe G est *quasi-déployé* (resp. *anisotrope*) si $\Delta_0 = \varnothing$ (resp. $\Delta_0 = \Delta$) ; il est *déployé* s'il est quasi-déployé et si Γ opère trivialement sur Δ. Un sommet ou un ensemble de sommets de Δ est dit *isotrope* (resp. *anisotrope*) s'il est contenu dans $\Delta - \Delta_0$ (resp. Δ_0). Si P est un k-sous-groupe parabolique minimal de G, le groupe L' du n° 1.5 est un groupe anisotrope, appelé *noyau anisotrope* de G, et le théorème 1 dit alors, *grosso modo*, que G est déterminé par son indice et son noyau anisotrope.

Un k-indice est un triple formé d'un diagramme de Dynkin Δ, d'une action $\Gamma \to \mathrm{Aut}\Delta$ de $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(\tilde{k}/k)$ sur Δ et d'une partie Δ_0 de Δ stable par Γ. Il est dit *admissible* s'il existe un groupe G dont ce soit l'indice. Un *indice* est un triple formé d'un diagramme de Dynkin Δ, d'un sous-groupe A du groupe des automorphismes de Δ et d'une partie Δ_0 de Δ stable par A ; il est dit *admissible* s'il existe un corps k et un k-indice admissible $(\Delta,\Gamma \to \mathrm{Aut}\Delta$ d'image A, $\Delta_0)$. On représente (parfois imparfaitement) un indice (Δ,A,Δ_0) par la figure formée par Δ dont les sommets d'une même orbite de A sont placés très près les uns des autres tandis que les orbites isotropes sont entourées d'un cercle.

Dans [B] est donnée (sans preuve écrite) la liste de tous les indices admissibles, à cela près que le problème de l'admissibilité de

$E_{8,1}^{133}$ 

y est laissé en suspens ; est aussi donnée la liste des k-indices admissibles pour certains corps k particuliers. Dans le cours, on a démontré en détail ces résultats de [B], montré que l'indice $E_{8,1}^{133}$ est admissible (cf. le n° 2.4.3 ci-dessous) et ajouté aux cas particuliers traités dans [B] celui, important pour certaines applications, des corps globaux sans place réelle, c'est-à-dire des corps de fonctions et des corps de nombres totalement imaginaires (cf. le n° 1.10.5 ci-dessous).

La proposition 1 permet *en principe* de déterminer tous les indices admissibles, mais les listes de [B] s'obtiennent beaucoup plus rapidement en utilisant, d'une part, la classification connue des formes de groupes classiques (voir notamment la référence [46] de [B]) et, d'autre part, quelques conditions nécessaires d'admissibilité, d'application commode : outre les critères déjà donnés dans [B], et que nous ne rappelons pas ici, on a fait usage dans le cours d'un procédé décrit au n° suivant et qui s'avère particulièrement efficace dans le cas des groupes exceptionnels.

1.8. *Système de racines relatif*

Le système de racines relatif Φ^{rel} de G se déduit instantanément de l'indice $(\Delta,\Gamma \to \mathrm{Aut}\Delta,\Delta_0)$ par application des propriétés suivantes.

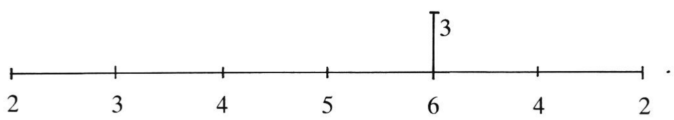
(a) Il existe une bijection canonique ρ de l'ensemble $(\Delta - \Delta_0)/\Gamma$ des orbites de Γ dans $\Delta - \Delta_0$ sur une base Δ^{rel} du système de racines (non nécessairement réduit) Φ^{rel}.

(b) Si l'on ôte de Δ une orbite isotrope o de Γ, le résultat est encore un k-indice admissible, et une base du système de racines relatif correspondant s'obtient en retirant $\rho(o)$ de Δ^{rel}.

(c) Soient $o, o' \in (\Delta - \Delta_0)/\Gamma$. Alors $\rho(o)$ et $\rho(o')$ sont connectées par une arête de Δ^{rel} si et seulement si tout sommet de o peut être relié à un sommet de o' dans le graphe Δ par un chemin dont les sommets intermédiaires sont contenus dans Δ_0.

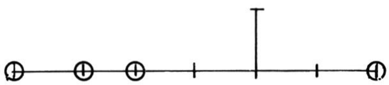
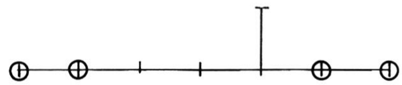
(d) *Le coefficient de $\rho(o)$ dans la racine dominante de Δ^{rel} est la somme des $c(a)$ pour $a \in o$.*

Montrons sur un exemple le parti qu'on peut tirer de ces énoncés pour la classification des indices admissibles. Supposons G de type E_8, non déployé et de rang relatif au moins 3 (i.e. $3 \leqslant \mathrm{Card}\,(\Delta - \Delta_0) < 8$). Les $c(a)$ ont les valeurs suivantes :



Il s'ensuit, vu (a), (c), (d), que Φ^{rel} est un système de racines irréductible (mais non nécessairement réduit) tel que le coefficient dans la racine dominante ne soit égal à 1 pour aucune « racine simple » et soit égal à 2 pour au plus deux d'entre elles. Compte tenu de l'hypothèse faite sur le rang relatif de G, cela veut dire que Φ^{rel} est de type F_4. En outre, l'extrémité supérieure de l'arête verticale du diagramme $\Delta = E_8$ ne peut être isotrope sinon, vu (c) et la position des sommets de coefficient 2 dans E_8, le graphe représentant Δ^{rel}

contiendrait un triangle. Finalement, on voit que l'indice de G est l'un des deux suivants :

 , 

Mais le second de ces indices n'est pas admissible comme on le voit par exemple en appliquant (b) au sommet de l'extrême gauche et en invoquant à nouveau (d) ; l'indice de G ne peut donc être que le premier des deux indices ci-dessus.

1.9. *Conditions suffisantes*

Une fois prouvé, par la méthode indiquée en 1.7, que tout indice admissible appartient à la liste de [B], il reste à faire voir que tout indice de cette liste est effectivement admissible. Dans le cas des groupes classiques, le plus commode est à nouveau d'utiliser la classification connue. Pour les groupes exceptionnels, on peut faire usage de la proposition 1, dont on voit qu'elle ramène chaque fois la preuve d'existence à une question du genre suivant : montrer l'existence d'un groupe anisotrope de type donné dont les invariants β_a ont des propriétés spéficiées. Si l'on exclut les types $E_{7,1}^{78}$ et $E_{8,1}^{133}$ de [B], qui posent des problèmes particuliers (voir plus loin, le n° 2.4), tous les cas peuvent être réglés par application de la proposition 2 ci-dessous.

Soit q une forme quadratique dans un k-espace vectoriel de dimension paire $\geqslant 4$. Nous écartant un peu de la terminologie reçue, nous disons que le *discriminant de q est* 1 si $\Gamma = \mathrm{Gal}\ (\tilde{k}/k)$ opère trivialement sur le diagramme de Dynkin de Spin q et, lorsqu'il en est ainsi, nous appelons *invariant de Hasse* de q l'élément $\hat{\beta}(\varpi)$ de Br k, où ϖ est le poids dominant de l'une quelconque des deux représentations semi-spinorielles de Spin q.

Proposition 2. — *Soit m un entier $\geqslant 2$. Sur une extension transcendante pure convenable de k, il existe une forme quadratique à $2m$ variables, anisotrope, de discriminant 1 et d'invariant de Hasse 0, sauf si $m = 2$, 3 ou 5. Soit D un corps de quaternions de centre k, dont la classe dans* Br k *est notée $[D]$. Alors, sur une extension transcendante pure convenable de k, il existe une forme quadratique à $2m$ variables, anisotrope, de discriminant 1 et d'invariant de Hasse $[D]$, sauf si $m = 3$.*

Pour prouver la proposition 2, on exploite le fait bien connu que si q, q' sont deux formes quadratiques anisotropes sur k et si t est transcendant sur k, alors la forme quadratique $q \oplus tq'$ est anisotrope sur $k(t)$, et l'on utilise des formules donnant le discriminant et l'invariant de Hasse de la somme orthogonale de deux formes quadratiques.

1.10. *Corps particuliers*

1.10.1. *Corps finis.* Sur un corps fini, tout groupe semi-simple est quasi-déployé (conséquence immédiate d'un théorème bien connu de S. Lang).

1.10.2. *Corps des nombres réels.* Supposons $k = \mathbf{R}$. On sait alors que tout groupe semi-simple complexe possède une et une seule k-forme anisotrope (la « forme compacte »). Il résulte donc du théorème 1 que G (supposé simplement connexe, rappelons-le) *est entièrement déterminé par son indice.* Si G est anisotrope, l'élément non neutre de $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ induit sur Δ l'*involution d'opposition*, ce qui signifie qu'il opère par l'unique automorphisme non trivial sur les composantes connexes de Δ de type A_n $(n > 1)$, D_{2m+1} ou E_6, et trivialement sur les autres. Cela étant, la proposition 1 ramène la détermination des $\mathbf{R}$-indices admissibles (donc des groupes semi-simples réels) à celle des invariants β_a *pour les groupes anisotropes.* Supposons donc G anisotrope et presque simple (il suffit évidemment de considérer ce cas). Si $a \notin \Delta^\Gamma$, on a $\beta_a = 0$ (car $\beta_a \in \mathrm{Br}\,\mathbf{C}$!). Lorsque $a \in \Delta^\Gamma$, il est connu que β_a est trivial ou non selon que la somme des coefficients de la ligne indexée par a dans l'inverse de la matrice $(g(a,b))_{a,b\in\Delta}$ (cf. 1.1) appartient à $\mathbf{Z}$ ou à $\mathbf{Z} + \frac{1}{2}$. Pratiquement, il est presque aussi facile de retenir le résultat final que le critère précédent : l'homomorphisme $\beta : C^*(\Delta)^\Gamma \to \mathrm{Br}\,k$ (qui détermine les β_a) est non trivial si et seulement si Δ est de type A_{4m+1}, B_{4m+1}, B_{4m+2}, C_n, D_{4m+2} ou E_7 ; pour ces types-là, on a $C^*(\Delta)^\Gamma = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, ce qui détermine β.

1.10.3. *Corps local à corps résiduel fini.* Soit k un tel corps. On sait alors que si G est un k-groupe, presque simple et anisotrope sur k, c'est une restriction de scalaires $R_{l/k}\,\mathrm{SL}(d)$, où $l \subset \bar{k}$ est une extension finie séparable de k et D est une algèbre à division de centre l (cf. F. Bruhat et J. Tits, *Groupes algébriques sur un corps local*, III, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.* 1.A, 34 (1987), 671-698, article noté [GRCL 3] ci-après). Au moins une composante connexe de Δ est fixe par Gal (l/k) ; les invariants β_a associés à ses sommets, pris dans l'un des deux ordres naturels, sont $[D]$, $2[D]$, ..., $(d-1)[D]$, où $[D]$ désigne comme d'habitude l'image de D dans $\mathrm{Br}\,l$ et $d^2 = \dim_l D$. Les autres β_a se déduisent de ceux-là par conjugaison par Γ. Connaissant ainsi les groupes anisotropes et les invariants β_a pour ces groupes, on peut en déduire, comme en 1.10.2, la classification complète des groupes semi-simples sur k. La description que l'on vient de donner des groupes anisotropes et de leurs invariants β_a a une conséquence immédiate remarquable : *pour tout k-groupe G, un sommet a de Δ est isotrope si et seulement si* $\beta_a = 0$. En particulier, on voit que, si l'on se donne seulement le diagramme Δ, *un sommet a de Δ tel que $\gamma^*(a) = 0$ (c'est-à-dire tel que le poids fondamental ϖ_a appartienne au réseau des racines) est isotrope pour tout groupe de diagramme Δ.* Plus particulièrement encore, *si Δ est connexe et si $C^*(\Delta) = \{0\}$* (cas des types G_2, F_4, E_8), *tout groupe de diagramme Δ est déployé.*

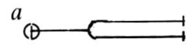
1.10.4. *Corps globaux.* Soient k un corps global, V l'ensemble de ses places, R l'ensemble de ses places réelles et, pour $v \in V$, k_v le complété de k en v. Les travaux de G. Harder sur le principe de Hasse, complétés par le résultat tout récent de Černousov concernant le cas de E_8 (résultat qui n'était encore connu, au moment du cours, que par des rumeurs), permettent *en principe* de donner la classification complète des k-groupes lorsqu'on connaît celle des k_v-groupes pour tout $v \in V$. On est ainsi ramené aux cas des numéros 1.10.2 et 1.10.3. Une méthode effective pour réaliser cette application du principe de Hasse à la classification, application sur laquelle les articles de G. Harder sont peu explicites, a été proposée dans le cours. En voici les grandes lignes.

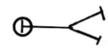
On se donne un diagramme de Dynkin Δ, disons connexe bien que cette restriction ne soit pas essentielle, une opération de Γ sur Δ et un système d'invariants β_a $(a \in \Delta)$ qui soit admissible sur k_v pour tout $v \in V$. On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Delta,\Gamma \to \mathrm{Aut}\Delta,(\beta_a)_{a\in\Delta})$ des (classes de Δ-k-isomorphismes de) groupes correspondant à ces données. On montre que cet ensemble n'est pas vide ; en fait, il possède assez souvent (mais non toujours) un unique élément de rang relatif maximum qui peut servir d'élément de référence. Tous les éléments de $\mathcal{G}$ s'obtiennent par torsion de l'un d'entre eux par un cocycle *à coefficients dans le groupe simplement connexe*, ce qui permet d'appliquer le principe de Hasse ; on voit ainsi que, une fois choisi un élément de référence dans $\mathcal{G}$, cet ensemble est en bijection avec les systèmes $(G_v)_{v\in R}$, où G_v est un k_v- (= $\mathbf{R}$-) groupe de diagramme de Dynkin Δ tel que l'action de Gal $(\mathbf{C}/k_v)$ sur Δ et les invariants $\beta_{G_v,a}$ s'obtiennent par extension des scalaires $k \to k_v$ à partir des données choisies. De plus, d'après un théorème de Harder,

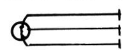
(*) *un sommet a de Δ est isotrope (pour le groupe G correspondant au système $(G_v)_{v\in R}$) sur k si et seulement s'il est isotrope sur tout k_v $(v \in V)$ ou, ce qui revient au même vu* 1.10.3, *s'il est isotrope pour tout G_v $(v \in R)$ et si* $\beta_a = 0$.

Nous allons considérer, à titre d'exemple, le cas des formes trialitaires des groupes de type D_4. Ici, on se donne Δ, de type D_4, on choisit l'un des trois sommets pendants de Δ et on le note simplement a, on se donne encore $l = k(a)$, extension cubique de k, et β_a, classe $[D] \in \mathrm{Br}\, l$ d'une algèbre de quaternions D de centre l. Ces données déterminent (à une permutation près des deux autres sommets pendants de Δ) l'action de Γ sur Δ et le système $(\beta_{a'})_{a'\in\Delta}$ (car si a' est le sommet central de Δ, on a nécessairement $\beta_{a'} = 0$). On vérifie aussitôt, compte tenu de la classification des formes réelles de D_4, que la condition d'admissibilité du système $(\beta_{a'})_{a'\in\Delta}$ sur les k_v s'exprime par la relation $\mathrm{Cores}_{l/k}\, \beta_a = 0$. Considérons les systèmes $(G_v)_{v\in R}$ comme ci-dessus. Pour $v \in R$, trois cas peuvent se présenter :

(I) $k_v \otimes D \cong M_2(\mathbf{R})^3$ et G_v est anisotrope ou déployé ;

(II) $k_v \otimes D \cong \mathrm{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ et G_v est d'indice  ou quasi-déployé ;

(III) $k_v \otimes D \cong \mathrm{M}_2(\mathbf{R}) \times \mathbf{H}^2$, où $\mathbf{H}$ désigne l'algèbre de quaternions de Hamilton, et G_v est d'indice  (la position de a sur ce diagramme n'est pas imposée ; elle est fonction de v et la classe d'isomorphisme de G dépend évidemment de cette fonction).

Soient r = Card R le nombre de places réelles de k et r''' le nombre des places satisfaisant à la condition (III). Posons $\varepsilon = 1$ si l'on a $r''' = 0$ et $\beta_a = 0$, et $\varepsilon = 0$ sinon. Il résulte alors des énoncés précédents, et en particulier de (*), que parmi les classes d'isomorphisme de groupes G (dotés d'un isomorphisme $\Delta(G) \to \Delta$ compatible avec les choix de l et β_a), ε sont quasi-déployées, $2^{r'''} - \varepsilon$ sont d'indice  et $2^r - 2^{r'''}$ sont anisotropes.

1.10.5. *Corps de fonctions et corps de nombres totalement imaginaires.* Les résultats précédents se simplifient lorsque R est vide. Par exemple, il résulte alors de 1.10.4 (*) que, comme pour les corps locaux à corps résiduels finis, *un sommet a de Δ est isotrope pour G si et seulement si* $\beta_a = 0$. Appliquant la méthode du n° 1.10.4 aux corps globaux k sans place réelle, on trouve que *les seuls indices k-admissibles sont, outre ceux qui sont admissibles sur les corps locaux à corps résiduel fini, les indices ${}^2\mathrm{A}^{(d)}_{n,r}$ pour $n + 1 = 2rd$, $(2r + 1)d$ ou $(2r + 2)d$, ${}^2\mathrm{D}^{(1)}_{r+1,r}$, ${}^2\mathrm{D}^{(2)}_{2r+3,r}$, ${}^3\mathrm{D}^9_{4,1}$, ${}^6\mathrm{D}^9_{4,1}$ et ${}^2\mathrm{E}^{16''}_{6,2}$ (notations de* [B]*)*.

2. *Corps locaux*

Dans la seconde partie du cours, on s'est posé la question de savoir dans quelle mesure les résultats précédents peuvent être transposés à la « théorie locale », fondée par N. Iwahori et H. Matsumoto et développée par F. Bruhat et J. Tits dans les articles *Groupes réductifs sur un corps local*, I, II, *Publ. Math. I.H.E.S.* 41 (1972), 5-251 et 60 (1984), 5-184. Celle-ci est, en quelque sorte, une théorie des groupes réductifs sur un corps local considérés comme objets (de dimension infinie) définis sur le corps résiduel ; elle présente de nombreuses analogies formelles avec la théorie relative ordinaire des groupes réductifs (de dimension finie) sur un corps quelconque, ce qui donne son sens à l'interrogation du début de ce paragraphe. Nous commençons par rappeler quelques faits tirés des articles en question et mettant en relief certaines de ces analogies.

2.1. *Préliminaires. Rappels*

Soient K un corps local à corps résiduel k parfait, $\tilde{K}$ une extension étale maximale de K dont le corps résiduel (algébriquement clos) est noté $\tilde{k}$, Γ le groupe de Galois Gal $(\tilde{K}/K)$ = Gal $(\tilde{k}/k)$ et G un K-groupe algébrique que, pour éviter de nombreuses circonlocutions et parfois de réels écueils (cf. [GRCL 3], § 2), nous supposerons d'emblée absolument presque simple et simplement connexe. Nous écrirons parfois G pour $G(\tilde{K})$. Au groupe G est canoniquement associé un *diagramme de Dynkin résiduel* ; c'est celui-ci, et aussi l'ensemble de ses sommets, que nous noterons désormais $\Delta = \Delta(G)$. Les diagrammes de Dynkin résiduels des divers groupes G ne sont autres que les diagrammes de Dynkin ordinaires complétés, à cela près que les flèches affectant les arêtes doubles ou triples peuvent être orientées de façon arbitraire. À toute partie Θ de Δ correspond une certaine classe de conjugaison de sous-groupes de G dits « parahoriques de type Θ ». Le groupe Γ opère sur Δ et sur G ; un *sous-groupe K-parahorique* est un sous-groupe parahorique invariant par Γ. Soit P un sous-groupe K-parahorique de type Θ. Il lui est associé canoniquement un schéma en groupes de fibre générique G sur l'anneau des entiers de K, schéma dont $P(K) = P \cap G(K)$ est le groupe des points entiers. Par réduction modulo l'idéal maximal, on en déduit un k-groupe connexe $\bar{P}$ et le quotient L de ce dernier par son radical unipotent joue ici un rôle analogue à celui du groupe L du n° 1.5, mais il faut noter deux différences essentielles : ce groupe L -ci est un quotient et non plus en général un sous-groupe de P, et, surtout, on n'a pas ici de résultat analogue au lemme du n° 1.5 (même lorsque G lui-même est adjoint, le centre du groupe L peut par exemple être fini et non trivial). Le diagramme de Dynkin ordinaire du groupe dérivé L' de L est le sous-diagramme de Δ ayant Θ pour ensemble de sommets ; on le note aussi Θ. Si P est un sous-groupe K-parahorique minimal de G (ils sont tous conjugués), son type est noté Δ_0 et le groupe L' est anisotrope : on définit ainsi l'*indice résiduel* $(\Delta,\Gamma \to \mathrm{Aut}\Delta,\Delta_0)$ et le *noyau anisotrope résiduel* L' de G. Signalons que l'indice résiduel d'un groupe détermine son indice ordinaire. Nous pouvons à présent énoncer avec plus de précision les questions qui ont été examinées dans le cours. Existe-t-il des « analogues résiduels » du théorème 1 et de la proposition 1 ? En particulier, un groupe est-il déterminé à isomorphisme près par son indice résiduel et son noyau anisotrope résiduel ? Quels sont tous les indices résiduels admissibles ?

2.2. *Un « théorème de Witt » résiduel ?*

Il ne reste pas grand-chose du « théorème de Witt » en théorie locale. Déjà en tant que $\tilde{K}$-groupe, G n'est pas toujours déterminé par son diagramme de Dynkin résiduel. La question naturelle qui se pose est donc : *supposant donné le $\tilde{K}$-groupe G*, sa K-structure est-elle déterminée par les données Θ, L'

analogues à celles du théorème 1 ? La réponse est en général négative, même lorsque Θ est vide : il n'y a généralement pas unicité du groupe *résiduellement quasi-déployé* (groupe tel que $\Delta_0 = \emptyset$) correspondant à une action donnée de Γ sur Δ. Cela résulte par exemple, dans le cas des formes intérieures de A_n, du théorème fondamental de structure du groupe de Brauer d'un corps local (cf. J.-P. Serre, *Corps locaux*, Chap. XII, § 3, théorème 2). Cependant, la question posée plus haut a une réponse positive dans un cas important :

THÉORÈME 2. — *Supposons le corps k de dimension cohomologique $\leqslant 1$ (cas d'un corps fini par exemple). Alors G est résiduellement quasi-déployé et entièrement déterminé à K-isomorphisme près (une fois donnée sa classe de $\tilde{K}$-isomorphisme) par l'action de Γ sur Δ.*

Cf. [GRCL 3], § 4.

2.3. *Existence*

En ce qui concerne l'analogue local de la proposition 1, la situation est bien meilleure. Un K-groupe semi-simple est dit *résiduellement déployé* s'il est résiduellement quasi-déployé et si Γ opère trivialement sur son diagramme de Dynkin résiduel. Soient donnés un K-groupe simplement connexe résiduellement déployé G_{rd} de diagramme de Dynkin résiduel connexe Δ (l'hypothèse d'existence de ce groupe n'est pas tout à fait innocente : cf. [GRCL 3], § 2), une opération de Γ sur Δ, une partie propre Θ de Δ stable par Γ et un k-groupe semi-simple simplement connexe $\tilde{L}'$ de diagramme de Dynkin (ordinaire) Θ, tel que l'action de Γ sur Θ définie par $\tilde{L}'$, coïncide avec la restriction à Θ de l'action donnée sur Δ. On s'intéresse aux conditions d'existence d'un groupe G doté d'un $\tilde{K}$ -isomorphisme sur G_{rd}, donc de diagramme de Dynkin résiduel Δ, possédant les propriétés suivantes : l'action de Γ sur Δ définie à partir de G est l'action préassignée, G possède un sous-groupe K-parahorique de type Θ et si P est un tel sous-groupe, le k-groupe semi-simple L' que l'on en déduit comme en 2.1 est l'image de $\tilde{L}'$ par une isogénie centrale induisant l'identité du diagramme de Dynkin Θ. Pour $a \in \Delta - \Theta$, on définit exactement comme en 1.3 le sous-corps $k(a)$ de k et comme en 1.6 le poids dominant $\varpi_\Theta(a)$ de L'.

PROPOSITION 3. — *Il existe un groupe G ayant les propriétés requises si et seulement si $\hat{\beta}_{k(a)}(\varpi_\Theta(a)) = 0$ pour tout $a \in \Delta - \Theta$, où l'invariant $\hat{\beta}_{k(a)}$ est relatif au groupe $\tilde{L}'$ (omis de la notation pour raisons typographiques).*

La preuve comporte deux étapes :

(i) preuve de l'existence d'un groupe résiduellement quasi-déployé pour toute action de Γ sur Δ (c'est le cas particulier de la proposition pour $\Theta = \emptyset$) ;

(ii) passage de ce cas particulier au cas général.

La seconde étape est une application immédiate des résultats de cohomologie galoisienne de [GRCL 3]. Disons quelques mots de la première.

Dans le cas classique, l'existence d'une forme quasi-déployée correspondant à une action arbitrairement choisie de Γ sur le diagramme de Dynkin *ordinaire* s'obtient comme conséquence immédiate du fait que, si H désigne un k-groupe simplement connexe déployé de diagramme de Dynkin $\Delta°$, l'épimorphisme canonique $\mathrm{Aut}_k H \to \mathrm{Aut}\Delta°$ possède une section. De même, pour l'étape (i) de la preuve de la proposition 3, on utilise le fait que l'épimorphisme canonique $\mathrm{Aut}_K G_{\mathrm{rd}} \to \mathrm{Aut}\Delta$ possède lui aussi une section. Dans le cours, ce fait a été déduit d'une proposition plus générale, concernant un corps K quelconque (non nécessairement local) :

PROPOSITION 4. — *Soient H un groupe absolument presque simple, simplement connexe et quasi-déployé sur K (corps quelconque), S un tore K-déployé maximal de H, Ψ_0 une base du système de racines de H relatif à S, système de racines que l'on suppose réduit, et Ψ l'ensemble de racines obtenu en adjoignant à Ψ_0 soit l'opposée a_0 de la racine dominante, soit l'opposée a_0' de la plus grande racine courte. Pour $a \in \Psi$, soit U_a le sous-groupe radiciel de H correspondant et u_a un élément de $U_a(K) - \{1\}$. Alors, pour toute isométrie σ de Ψ (relativement à une métrique euclidienne sur* $\mathrm{Hom}(S,\mathbf{Mult})$ *invariante par le groupe de Weyl relatif), l'application $u_a \mapsto u_{\sigma(a)}$ se prolonge, de façon évidemment unique, en un K-automorphisme de H stabilisant S, sauf dans les deux cas suivants :*

H est de type A_{2m} et $\sigma \neq 1$;

H est de type B_{2m}, $\Psi = \Psi_0 \cup \{a_0'\}$ et $\sigma \neq 1$.

Dans ces cas-là, l'application $u_a \mapsto u_{\sigma(a)}^{-1}$ se prolonge en un K-automorphisme de H stabilisant S.

Dans tous les cas, on en déduit un homomorphisme $\mathrm{Isom}\Psi \to \mathrm{Aut}_K(H,S)$. Celui-ci dépend évidemment du choix des u_a et, contrairement à ce qui se passe pour la section de l'homomorphisme $\mathrm{Aut}_k H \to \mathrm{Aut}\Delta°$ dont il a été question précédemment, les homomorphismes $\mathrm{Isom}\Psi \to \mathrm{Aut}_K(H,S)$ correspondant à des choix différents des u_a ne sont pas nécessairement conjugués par des éléments de $\mathrm{Aut}_k(H,S)$; c'est une raison, parmi d'autres, de la non-unicité des formes résiduellement quasi-déployées correspondant à une opération donnée de Γ sur Δ.

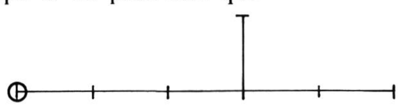
2.4. *Application. Exemples*

2.4.1. *Corps résiduel de dimension cohomologique* $\leqslant 1$. Mettant ensemble le théorème 2 et la proposition 3, on voit que, si k est de dimension cohomologique $\leqslant 1$, les classes d'isomorphisme de K-formes, dotées d'un isomorphisme de Δ sur leur diagramme de Dynkin résiduel, d'un $\tilde{K}$-groupe simplement

ment connexe donné de diagramme de Dynkin résiduel Δ, sont en bijection canonique avec les opérations de Γ sur Δ. Cela justifie la classification du § 4 de l'article *Reductive groups over local fields, Proc. Symp. pure Math.* 33, vol. 1 (1979), 29-69.

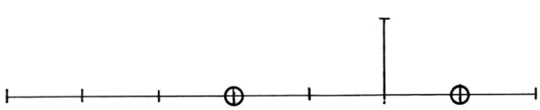
2.4.2. *Une forme de rang relatif 1 de* E_7. Nous nous intéressons ici aux groupes G d'indice résiduel.

Le noyau anisotrope résiduel d'un tel groupe est, à une isogénie centrale près, de la forme $\mathrm{SL}(D_1) \times \mathrm{SL}(D_2) \times \mathrm{SL}(D_3)$, où les D_i sont des algèbres à division centrales sur k de dimension 9. La proposition 3 implique qu'un groupe G ayant l'indice résiduel et le noyau anisotrope résiduel en question existe si et seulement si $D_1 \cong D_2 \cong D_3$. Il est facile de voir que l'indice ordinaire d'un tel groupe G ne peut être que

$\mathrm{E}_{7,1}^{78}$ 

(cf. [B]). Donc, s'il existe des algèbres à division de degré 3 de centre k, il existe aussi des K-groupes d'indice $\mathrm{E}_{7,1}^{78}$. En examinant le détail de la preuve, on s'aperçoit qu'elle montre aussi l'existence de tels groupes sur $k(t)$. Dans la première partie du cours, on avait déjà indiqué une autre preuve d'existence de telles formes de E_7, basée sur la considération d'algèbres de Jordan exceptionnelles à division ; c'est la méthode qui avait été utilisée pour établir les tables de [B].

2.4.3. *Une forme de rang relatif 1 de* E_8. De façon tout à fait analogue, la proposition 3 appliquée aux groupes G d'indice résiduel



montre qu'un tel groupe existe sur K (et aussi, par une variante de la preuve, sur le corps $k(t)$), dès qu'il existe une algèbre à division centrale sur k, de dimension 16 et d'ordre 4 dans $\mathrm{Br}\, k$. De plus, on montre que l'indice ordinaire de G est l'indice $\mathrm{E}_{8,1}^{133}$ déjà représenté au n° 1.7 ci-dessus, ce qui résoud le problème d'admissibilité de cet indice, laissé en suspens dans [B].

2.4.4. *Formes anisotropes.* Soit Δ un diagramme de Dynkin complété ordinaire (ce qui veut donc dire que les flèches affectant les arêtes doubles ou triples ont la direction standard). La proposition 3 implique alors (moyennant une vérification cas par cas : je ne connais pas d'autre preuve de ce fait) que, pour tout sommet a de Δ, l'indice résiduel constitué par Δ sur lequel Γ opère trivialement et $\Delta_0 = \{a\}$ est admissible lorsque k est suffisamment compliqué. Il y a là un contraste assez surprenant avec le cas des indices ordinaires où, en général, peu d'ensembles à un élément sont des Δ_0 admissibles (voir les tables de [B]).

J. T.

PUBLICATIONS

F. BRUHAT et J. TITS, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. Deuxième Partie : Groupes unitaires* (*Bull. Soc. Math. France,* 115, 1987, 141-195).

F. BRUHAT et J. TITS, *Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne* (*Journal Fac. Sci. Univ. Tokyo,* Sect. 1A, 34, n° 3, 1987, 671-698).

P. LENTOUDIS et J. TITS, *Sur le groupe des automorphismes de certains produits en couronne* (*C. R. Acad. Sci. Paris,* 305, 1987, Série I, 847-852).

M. RONAN and J. TITS, *Building buildings* (*Math. Ann.*, 278, 1987, 291-306).

J. TITS, *Geometrie von Raum, Zeit und Kausalität : Ein axiomatischer Zugang* (*in* Raum und Zeit, Vorträge anlässlich der Jahresversammlung vom 9.bis 12. April 1980, *Nova Acta Leopoldina*, Bd. 54, Nr. 244, 1987, 101-111).

— , *Unipotent elements and parabolic subgroups of reductive groups. II* (*in* Algebraic Groups Utrecht 1986, *Springer Lecture Notes in Math.*, 1271, 1987, 265-284).

— , *Le module du « Moonshine »* (*in* Séminaire Bourbaki, 1986-1987, exp. n° 684, juin 1987, *Astérisque, Soc. Math. Fr.*, 152-153, 1987, 285-303).

— , *Groupes de type E sur les corps globaux* (Texte d'illustration au cours, polycopié, 1988, 4 pp.).

— , *Sur le groupe des automorphismes de certains groupes de Coxeter* (*Journal of Algebra*, 113, 1988, 346-357).

MISSIONS ET CONFÉRENCES

Codirection avec T. A. Springer du colloque *Algebraische Gruppen*, Oberwolfach, avril 1988.

Exposés

— *Symétries,* Soc. Belge des Professeurs de Mathématiques, Verviers, août 1987.

— *Classification of simple algebraic groups over fields and local fields,* Conf. en l'honneur de Yen Shi Ta, Guilin, septembre 1987.

— *Buildings,* 4 exposés, Math. Res. Institute, Nankai Univ., Tianjin, octobre 1987.

— *Kac-Moody groups,* 3 exposés, *ibid.*, octobre 1987.

— *The Monster, ibid.*, octobre 1987.

— *Kac-Moody algebras and groups,* 2 exposés, East China Normal Univ., Shanghai, octobre 1987.

— *A historical survey of finite simple groups,* Zhengzhou, octobre 1987.

— *On the characterization of the classical groups as automorphism groups of certain geometries,* Xian, octobre 1987.

— *A survey of the sporadic groups,* Beijing Univ., novembre 1987.

— *The Monster : Griess' construction ; the Mooshine module after Frenkel-Lepowsky-Meurnan,* 2 exposés, *ibid.*, novembre 1987.

— *Buildings, group amalgamations and applications to some arithmetic and nonarithmetic groups,* Academia Sinica, Beijing, novembre 1987.

— *Le groupe des automorphismes de certains groupes de Coxeter,* Séminaire Chevalley, Paris, mai 1988.