

Physique statistique

M. Philippe NOZIÈRES, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Cours : Interface entre deux phases : équilibre, instabilités et formation de structures.

Le but de cet enseignement était de dégager les traits communs aux nombreuses instabilités interfaciales observées dans des domaines très divers. La physique sous-jacente à tous ces phénomènes a d'abord été illustrée sur des exemples nombreux, dans des contextes très variés. Une seconde partie, plus synthétique, a abordé le comportement général d'un interface plan et la formation d'instabilités cellulaires. Faute de temps, ce programme n'a pu être mené à son terme : il sera achevé l'an prochain.

I. EXEMPLES PHYSIQUES D'INSTABILITÉS INTERFACIALES

On peut les classer selon des critères divers : systèmes potentiels (où l'on peut minimiser une énergie) vs systèmes dynamiques ouverts — instabilités stationnaires vs instabilités convectives (entraînées par un écoulement) — instabilités « inertielles » vs instabilités diffusives, etc... Nous avons choisi un peu arbitrairement la présentation suivante :

1) *Grandes longueurs d'onde*

a) *L'instabilité gravitationnelle de Rayleigh Taylor*

Elle intervient lorsqu'un interface horizontal sépare un fluide supérieur 2 plus lourd d'un fluide inférieur 1 plus léger. Un simple calcul d'énergie potentielle montre que l'interface est instable pour toute perturbation de vecteur d'onde k inférieur à un seuil $k_c = (\rho_2 - \rho_1) g / \gamma$, où ρ est la masse volumique de chaque phase et γ l'énergie capillaire (stabilisante). La dynamique de l'interface est contrôlée par l'inertie du fluide dans les deux phases.

Dans le cas stable ($\rho_2 < \rho_1$), on retrouve les ondes de gravité et les ondes capillaires familières (fréquence ω^2 respectivement d'ordre gk et γk^3). Ici la déformation de l'interface croît exponentiellement avec un incrément.

$$s = \left[\frac{\gamma k}{\rho_1 + \rho_2} (k_c^2 - k^2) \right]^{1/2}$$

Il est facile d'incorporer les viscosités η_1 et η_2 dans ce calcul. Il apparaît des couches limites au voisinage de l'interface, dont l'épaisseur $\delta \sim [\eta/\rho\omega]^{1/2}$ doit être comparée à la longueur d'onde k^{-1} . Le domaine d'instabilité n'est pas modifié (il résulte d'arguments statiques), mais le taux de croissance s est profondément changé si $k\delta \gg 1$. Il existe un vecteur d'onde caractéristique $k^* \sim (g\rho^2/\eta^2)^{1/3}$. Aux fortes viscosités et dans le domaine $k^* \ll k \ll k_c$, s est d'ordre $1/k$: l'instabilité croît lentement.

La physique est très différente en géométrie cylindrique (stabilité d'un jet) car la capillarité peut alors devenir *déstabilisante* : c'est le vieux problème de Plateau. Un calcul simple pour un fluide non visqueux montre que le mode d'étranglement est instable pour toute longueur d'onde supérieure au périmètre $2\pi R$ du jet. Le mode le plus instable correspond à $kR = 0,7$.

b) *Instabilité de Kelvin Helmholtz*

Elle résulte de l'écoulement relatif de deux fluides non visqueux parallèlement à leur surface de séparation. L'instabilité est stabilisée par la gravité aux petits k , par la capillarité aux grands k . Elle est convective, entraînée par l'écoulement fluide. Un traitement linéarisé des équations de mouvement donne la relation de dispersion. Les non-linéarités interviennent à la fois dans l'équation de Navier Stokes et dans les conditions aux limites (problème de Stefan).

c) *Fluides en rotation : instabilité centrifuge*

Un interface cylindrique dans un récipient tournant est soumis à une instabilité analogue à Rayleigh Taylor, la force centrifuge jouant le rôle de la gravité. On peut se demander si cette instabilité existe sur le front géophysique séparant un air polaire froid d'un air équatorial plus léger. Si on se limite aux longueurs d'onde très supérieures à l'épaisseur atmosphérique, le problème est bidimensionnel, localement dans le plan horizontal. Il convient alors de remarquer que le gros de la force centrifuge est incorporé dans la gravité : seule subsiste la différence due aux vents, c'est-à-dire la force de Coriolis. Cette instabilité de Coriolis se calcule sans difficulté : elle est convective et apparaît au-delà d'un seuil $k = k_c$.

En fait, la force de Coriolis F_c reste petite devant la gravité : on ne peut avoir de front raide que si un écoulement relatif de part et d'autre renforce la

discontinuité de F_c (condition « de Margules »). Il apparaît ainsi une instabilité de Kelvin Helmholtz qui dans le contexte géophysique masque l'instabilité de Coriolis. Celle-ci n'en est pas moins réelle et pourrait être importante dans d'autres problèmes.

2) Bifurcation à vecteur d'onde fini

a) Instabilité d'une interface chargée électriquement

L'exemple type est l'interface liquide vapeur de l'hélium. Les charges sont plaquées sur la surface par un champ extérieur ; elles jouent un rôle déstabilisant, par « effet de pointe ». Un calcul linéaire simple donne la relation de dispersion : l'instabilité apparaît à $k = k_c$, au-delà d'un seuil de champ. On peut y incorporer une mobilité finie des charges le long de l'interface, par frottement sur l'une ou l'autre des deux phases : selon le cas, l'effet est très différent.

Le problème non linéaire est intéressant, car il existe un cas extrême soluble, contrairement à l'usage. Pour un fort déplacement, les charges s'accumulent en des points singuliers. L'interface y présente un profil anguleux, où la force électrostatique qE est équilibrée par la tension de surface des deux côtés. On peut étudier les états stationnaires, leur stabilité, la formation des gouttes dans un langage très simple, instructif pour des problèmes moins favorables.

Un calcul analogue en géométrie sphérique permet d'étudier le fractionnement d'une goutte chargée (Rayleigh).

b) Ferrofluides

Leur physique est très analogue à celle du cas précédent, avec en plus la souplesse d'application d'un champ magnétique. La discussion s'est limitée au cas linéaire $B = \mu H$. La seule difficulté est de préciser la nature du tenseur d'efforts dans un milieu aimanté. Cela fait, on obtient facilement la relation de dispersion aux faibles amplitudes. Les forces magnétiques sont déstabilisantes lorsque le champ H est perpendiculaire à l'interface : on retrouve un seuil d'instabilité à $k = k_c$. Elles sont en revanche stabilisantes pour un champ parallèle — qui peut ainsi contrebalancer une éventuelle instabilité d'écoulement du type Kelvin Helmholtz.

Le problème est strictement potentiel, et l'on peut aborder l'étude des non-linéarités en minimisant une énergie : on voit ainsi clairement apparaître la génération d'harmoniques. En pratique, les états stationnaires sont bidimensionnels, avec un réseau carré ou hexagonal, et la bifurcation est sous critique : un calcul quantitatif est difficile.

c) *Instabilité de fusion d'un solide sous contrainte uniaxiale*

Cet effet a été suggéré tout récemment par Grinfeld. Un solide limité par le plan $z = 0$ est soumis à un effort $\sigma_{xx} \neq \sigma_{zz}$. Si on crée une onde de fusion-cristallisation, on viole les conditions d'équilibre élastique en surface : il apparaît une déformation élastique en volume qui pénètre sur une longueur d'onde et qui *abaisse* l'énergie (la déformation *relâche* des contraintes de surface). D'où une tendance à l'instabilité, contrecarrée de nouveau par la gravité aux petits k , par la capillarité aux grands k . Ici encore il faut définir avec précision l'énergie libre élastique. Il est alors facile de calculer la déformation en volume, d'écrire l'énergie totale et d'en déduire la condition d'instabilité. L'interface se déforme spontanément (par *fusion*) au-delà d'un seuil $|\sigma_{xx} - \sigma_{zz}|_c$ relativement modeste (typiquement 0,1 à 1 bar) : l'instabilité semble avoir été observée dans l'hélium.

3) *Instabilités secondaires : domaines magnétiques*

Leur géométrie est un compromis entre l'énergie de paroi γ d'une part, les diverses énergies de volume d'autre part (anisotropie, couplage magnétostatique dipole-dipole, couplage Zeeman à un champ extérieur H). La comparaison de ces énergies définit une longueur caractéristique $L^* = \gamma/\mu_0 M^2$. Pour une plaque mince d'épaisseur L en champ perpendiculaire, on peut avoir des structures en rubans ou en bulles, avec un très fort hystérésis lorsque H varie.

La structure en rubans, stable pour $H = 0$, le reste jusqu'à un champ de saturation H_s , fonction de L/L^* , pour lequel les domaines minoritaires disparaissent sur place. Mais la transition est du premier ordre : les rubans sont métastables jusqu'au champ d'effondrement $H = M$. De même, la structure en bulles a une plage de stabilité finie, limitée par l'effondrement aux forts champs, par la déformation spontanée aux champs faibles. On prévoit une transition du premier ordre ruban \rightarrow bulle en champ croissant, mais les différences d'énergies sont très faibles et l'hystérésis considérable. Seules sont observables les limites spinodales, contrôlées par les *instabilités secondaires* des diverses structures : instabilités en chevrons ou instabilités « péristaltiques » des rubans, instabilités de déformation et de fusion des bulles.

4) *Invasion d'un milieu poreux : Saffman-Taylor*

Un fluide 1 pousse un fluide 2 dans un milieu poreux à la vitesse v_0 . Chaque fluide est soumis à une force de frottement αv (loi de Darcy). Si $\alpha_1 < \alpha_2$, l'interface de séparation est instable, avec un incrément s donné par $(\alpha_1 + \alpha_2) s = (\alpha_1 - \alpha_2) k v_0 - \gamma k^3$.

L'instabilité intervient aux grandes échelles, la capillarité devenant décisive aux grands k . Sa dynamique est diffusive, contrôlée par le frottement, par opposition au caractère inertiel de Rayleigh-Taylor.

En pratique, le milieu poreux est remplacé par un écoulement de Poiseuille entre deux plaques parallèles à la distance d (cellule de Hele-Shaw). Supposant pour simplifier que seul le milieu 2 a une viscosité η , la géométrie de l'écoulement est caractérisée par un « nombre capillaire » sans dimension, $Ca = \eta v_0 / \gamma$. Le raccordement du ménisque aux parois de la cellule pose alors un délicat problème de mouillage dynamique.

(i) Si le mouillage statique est complet, il n'y a pas de difficulté. Le ménisque mobile se raccorde tangentiellement à la paroi, formant un film d'épaisseur $h(z)$ dont le profil se déduit d'un calcul ancien de Landau et Levich (l'écoulement visqueux dans le film est piloté par le gradient de pression capillaire). L'épaisseur asymptotique h_∞ est d'ordre $Ca^{2/3}$; la surpression capillaire au centre est décalée d'une correction du même ordre, négligeable si $kd \ll Ca^{1/3}$.

(ii) Si le mouillage est partiel, l'angle de raccordement statique est donné par la relation d'Young. Si le ménisque bouge, le raccordement est vraisemblablement tangentiel au niveau du contact (comme un ruban adhésif que l'on décolle). A grande distance, en revanche, on retrouve un problème du type Landau-Levich (avec $h_\infty = 0$). Pour un ménisque en rétraction, l'angle de raccordement diminue avec la vitesse, avant de sauter brutalement vers un mouillage total. La nature de cette transition est inconnue.

5) Instabilités de croissance cristalline

a) Croissance d'un corps pur : cinétique d'une interface plan

L'interface avance à la vitesse v . (On néglige l'advection : $\rho_S = \rho_L$). La croissance est en général contrôlée par l'évacuation de la chaleur latente à travers l'épaisseur ℓ_L du liquide. La dissipation à l'interface revient à ajouter à ℓ_L une épaisseur fictive \mathcal{L} , en général faible. Ces longueurs sont à comparer à la longueur de diffusion, $\ell_D = D/v$. Pour un échantillon infini, un profil thermique *stationnaire* d'épaisseur ℓ_D n'est possible que si la sursaturation réduite, $\Delta = C_p (T^* - T_\infty) / L$, est égale à 1 (la chaleur latente L sert à chauffer le fluide T_∞ à la température d'équilibre T^*). Si $\Delta < 1$, le mouvement de l'interface est diffusif, avec une vitesse v qui décroît en $1/\sqrt{t}$. La limite $\Delta = 1$ est très singulière, arrondie dès que l'on travaille à ℓ_L fini.

b) Instabilité de Mullins-Sekerka

On part d'un front plan de vitesse v , stationnaire ($\Delta = 1$). Sa déformation modifie le profil de diffusion de chaleur dans les deux phases, et crée par

effet de pointe une instabilité aux grandes longueurs d'onde. La capillarité joue de nouveau un rôle stabilisant en déplaçant la température d'équilibre à l'interface (correction de Gibbs-Thomson) : l'effet est caractérisé par une « longueur capillaire » d , d'échelle atomique.

Le calcul linéaire est très facile dans la limite $k\ell_D \gg 1$, où une solution « quasistatique » de l'équation de diffusion suffit. L'instabilité existe pour $k < k_c \sim (d\ell_D)^{-1/2}$. La généralisation à $k\ell_D < 1$ est un peu plus compliquée, mais sans problème. Elle permet de faire le pont avec une formulation de « couche limite », valable pour $k\ell_D \ll 1$, où la diffusion est localisée dans une mince pellicule le long de l'interface : la dynamique est alors contrôlée par un simple argument de conservation d'énergie. Cette analyse en couche limite est ici un peu académique, mais devient très utile pour des géométries plus compliquées, foncièrement non linéaires.

En principe, le mode neutre $k = k_c$ correspond à une déformation *stationnaire*, ici sans grand intérêt car elle est instable en phase et en amplitude. Il est néanmoins intéressant de noter la grande différence entre le modèle « symétrique » (diffusion de chaleur égale dans les deux phases) et le modèle « unilatéral » (diffusion dans le seul liquide). Pour un déplacement d'interface ζ donné, la déformation du champ de diffusion est d'ordre $k\zeta$ dans le premier cas, ζ/ℓ_d dans le second. Dans le cas usuel $k\ell_D \gg 1$, le modèle unilatéral est donc beaucoup plus simple : les états stationnaires, quelle que soit leur amplitude, ont un profil de volume inchangé.

On peut pousser le calcul en géométrie sphérique. Pour une sursaturation à l'infini donnée, il existe un rayon critique de nucléation R_c , qui fournit l'échelle de longueur du problème. Une sphère de rayon $R > R_c$ croît ; on peut alors étudier la stabilité d'une petite déformation $\rho_{\ell m}$ de symétrie (ℓ, m) . Physiquement, la quantité importante est la déformation relative $\rho_{\ell m}/R$, instable lorsque R dépasse un rayon critique $R_{c\ell}$. Le mode $\ell = 2$ est toujours stable ; $R_{c\ell} \sim \ell^2 R_c$ croît rapidement aux grands ℓ .

Il est facile d'inclure dans le calcul la dissipation d'interface. En géométrie plane, elle n'est importante que si $k\mathcal{L} \gg 1$: elle modifie la cinétique, mais pas la plage de stabilité. En géométrie sphérique, en revanche, elle supprime l'instabilité lorsque $\mathcal{L} > R$. Pour chaque harmonique ℓ , on peut tracer un diagramme d'états dans le plan $(\mathcal{L}/R, R/R_c)$.

La stabilité de déformation d'un germe sphérique de rayon R permet de calculer la forme stationnaire de croissance en présence d'une faible anisotropie de γ : cette anisotropie « force » une déformation qui tend à relaxer si $R \ll R_{c\ell}$. L'étude des formes stationnaires en fonction de R est donc un moyen d'accès commode aux seuils d'instabilité $R_{c\ell}$.

c) *Croissance d'un mélange : solidification directionnelle*

A l'équilibre, les concentrations C_L et C_S des deux phases sont différentes : la solidification rejette l'excédent $\Delta C = C_L - C_S$, qui doit être évacué par diffusion, essentiellement dans la phase liquide. C'est cette diffusion de soluté qui limite la croissance. Dans un système isotherme, le problème est le même que pour la diffusion de chaleur dans un corps pur : on retrouve l'instabilité de Mullins-Sekerka. Dans la limite $k\ell_D \gg 1$, la relation de dispersion est inchangée :

$$s = kv - Ddk^3$$

la seule difficulté étant le calcul de la longueur capillaire d , qui exige un peu de thermodynamique des solutions. On montre que d est inversement proportionnel à la concentration de soluté : contrairement au cas thermique, d peut être grand. La relation de dispersion exacte (valable pour $k\ell_D \leq 1$) est un peu plus compliquée, car ΔC est affecté par les corrections capillaires.

Le problème devient vraiment intéressant lorsqu'on applique un gradient thermique stabilisateur (liquide chaud) qui sert de paramètre de contrôle. C'est la situation expérimentale où l'on « tire » le cristal à vitesse donnée dans un gradient thermique. Seule la situation la plus simple a été envisagée : diffusion de soluté unilatérale, profil thermique linéaire *donné* (on suppose la diffusion thermique instantanée). Le gradient thermique est caractérisé par une longueur ℓ_T (distance sur laquelle la concentration d'équilibre varie de ΔC). En gros, l'instabilité se produit lorsque $\ell_D < \ell_T$. Le calcul détaillé montre qu'elle apparaît avec un vecteur d'onde k_c fini, un peu comme dans un ferrofluide, mais pour des raisons très différentes. Dans la limite $d \ll \ell_D$, on a $k_c \sim (d/\ell_D^2)^{-1/3}$. Plus généralement, on peut tracer un diagramme de bifurcation dans le plan (d/ℓ_D) , (d/ℓ_T) : on constate que l'instabilité disparaît si l'une ou l'autre de ces variables devient trop grande (l'interface redevient stable si on tire le cristal très vite). Au voisinage de la bifurcation ($\ell_D \approx \ell_T$), on a une plage d'instabilité étroite facile à paramétrer.

d) *Influence du facettage sur l'instabilité de croissance*

La formation de facettes agit en général sur la cinétique : la croissance des facettes est très lente, limitée soit par la nucléation homogène, soit par la croissance spirale sur des défauts. A ce titre le facettage s'oppose à l'instabilité de Mullins-Sekerka. En fait, même si cette cinétique est rapide, la présence de facettes implique un *seuil d'amplitude* pour l'instabilité de croissance. C'est cet effet nouveau qui a été discuté en détail, dans une géométrie unidimensionnelle où l'interface est constitué de marches cristallines parallèles.

La forme d'équilibre d'un cristal peut être vue comme un équilibre de marches, soumises à une force de sursaturation F d'une part, à leur interac-

tion d'autre part. La facette est un « vide de marches », dont la largeur 2ℓ ne relaxe que si la facette peut croître. La taille d'équilibre ℓ^* correspond à un bilan d'énergie stationnaire lorsqu'on ajoute une terrasse : l'énergie 2β des deux marches supplémentaires est compensée par le gain d'énergie de volume.

On considère un interface en croissance dont l'orientation moyenne est parallèle à la facette. L'instabilité creuse des sillons, avec des facettes hautes et basses, séparées par des parties arrondies. On suppose l'interface en équilibre : la taille des facettes ℓ^* dépend de la sursaturation *moyenne* sur la facette, elle-même contrôlée par le profil diffusif en volume. Pour un modèle à diffusion unilatérale, on construit facilement un état stationnaire, avec une hauteur $\pm h$ des facettes d'ordre $1/\ell^*$. Cet état stationnaire est instable (on peut même calculer son temps de relaxation) : il représente donc un seuil en deçà duquel l'instabilité de Mullins Sekerka régresse. Ce seuil est d'autant plus bas que la longueur d'onde, d'ordre $2\ell^*$, est grande.

On peut inclure dans le calcul une mobilité finie des facettes, caractérisée par une longueur \mathcal{L}_F . On constate que les facettes hautes croissent aux dépens des facettes basses et envahissent toute la surface lorsque l'amplitude totale ($h_+ + h_-$) atteint $2\mathcal{L}_F$. Le seuil d'amplitude de Mullins Sekerka disparaît ainsi aux petites échelles.

II. ÉVOLUTION D'UN INTERFACE PLAN : NATURE DES INSTABILITÉS CELLULAIRES

Partant d'un interface plan, on considère une déformation unidimensionnelle de vecteur d'onde k donné. Peut-on aller au-delà du calcul linéaire ? Existe-t-il des états stationnaires et quelle est leur stabilité, en amplitude et en phase ? L'interface peut-il développer des singularités ? Nous avons essayé d'apporter une réponse partielle à ces questions sur des exemples précis.

1) Systèmes potentiels : minimisation d'une énergie

Un état stationnaire est caractérisé par un déplacement de l'interface qu'on développe en série de Fourier, de composantes ζ_n . Cet équilibre correspond à un extremum d'une certaine énergie $E(\zeta_n)$. Lorsqu'on varie les paramètres de contrôle, on retombe sur un problème de bifurcation classique, avec toute la richesse d'un problème non linéaire.

Toute la physique réside dans les couplages mode-mode, qu'il s'agit d'abord de classer en exploitant au maximum les symétries du problème — en premier lieu, l'invariance translationnelle. Les couplages d'intensité du type $|\zeta_n|^2 |\zeta_m|^2$ peuvent déstabiliser un mode donné, harmonique ou sous harmonique, mais cela demande un couplage minimum. En revanche, les termes d'hybridation (du type $\zeta_m \zeta_n \zeta_p$ avec $m + n + p = 0$) créent des harmoniques dès que le fondamental est instable : ils sont toujours déstabilisants.

Connaissant $E(\zeta_n)$, on peut étudier la compétition entre les différentes instabilités possibles, la nature et l'enchaînement des bifurcations — mais chaque cas est un cas d'espèce. La seule situation traitable analytiquement est celle d'un fondamental faiblement instable, qui *asservit* tous ses harmoniques. Ces derniers, très stables, ont une amplitude faible que l'on peut développer en puissances de l'amplitude fondamentale ζ_1 . L'énergie devient ainsi une fonction de la seule variable ζ_1 dont les bifurcations sont très simples, surcritique ou souscritique selon le signe des termes $|\zeta_1|^4$ (du 2^e ou du 1^{er} ordre dans le langage des transitions de phase).

Le mode de calcul de $E(\zeta_1)$ a été illustré en détail sur un exemple concret : l'instabilité électrohydrodynamique d'un interface chargé. La seule difficulté est le calcul de l'énergie électrostatique : il faut résoudre l'équation de Laplace en développant les conditions aux limites en puissances de ζ . Le calcul a été poussé à l'ordre $|\zeta_1|^4$: on voit clairement apparaître l'influence des termes d'hybridation. En rassemblant toutes les contributions à l'énergie (gravité, capillaire, électrostatique), on constate que la bifurcation à $k = k_c$ est surcritique si l'interface est peu chargée. Elle devient souscritique lorsqu'on s'approche de la saturation.

En tout état de cause, un tel développement en amplitude n'a de sens que si on reste *très près* de la bifurcation : sinon, on n'a aucune raison de se limiter aux plus bas ordres.

2) Systèmes dynamiques : le développement de Wollkind Segel

Le développement repose sur une séparation d'échelles de temps : le fondamental, très proche de la bifurcation, évolue *lentement* (les forces de rappel sont voisines de zéro). A l'inverse, les harmoniques répondent rapidement à toute sollicitation (ils sont très stables) : ils sont donc *asservis* au fondamental. L'amplitude $\zeta_n[\zeta_1]$ peut se calculer par un développement en série, avec une approximation quasistatique pour ζ_n (ou tout au moins par itération en $\dot{\zeta}_n$). En reportant dans l'expression complète de ζ_1 , on obtient l'équation de mouvement du fondamental

$$\dot{\zeta}_1 = F(\zeta_1)$$

où F apparaît comme un développement de puissances construit terme à terme. Les points fixes de F déterminent la nature de la bifurcation.

Ici encore, l'algèbre est élémentaire, mais un peu lourde. Pour en démontrer le mécanisme, un exemple a été traité en grand détail : la solidification directionnelle. Les équations de volume traduisent la diffusion et sont strictement linéaires. Les non-linéarités viennent des conditions aux limites à l'interface — condition d'équilibre et conservation du soluté. Le calcul du terme d'ordre ζ_1^3 dans F est facile, mais demande un peu de soin : on constate que son signe dépend du coefficient de ségrégation κ (rapport des pentes du

liquidus et du solidus). La bifurcation est souscritique si $\kappa < 0,45$, surcritique au-delà. En fait, ce résultat est un peu artificiel, car il suppose un profil thermique rigide et strictement linéaire. Dans la pratique, les conductivités thermiques du liquide et du solide sont différentes, et le déplacement de l'interface déforme le profil thermique : il faut résoudre des équations de diffusion couplées — en général, la bifurcation est souscritique.

3) Formation de singularités aux grandes amplitudes

C'est un problème beaucoup plus difficile : nous nous sommes limités à quelques remarques qualitatives sur la formation de *sillons* en solidification directionnelle, en géométrie bidimensionnelle (sillons « plans » pour lesquels il n'y a pas d'effet de constriction). Le profil arrière d'un sillon infini se calcule facilement en négligeant la capillarité : on trouve une loi de puissance dont l'exposant dépend de κ (il suffit d'écrire la conservation du soluté). En fait, il semble que ce sillon infini soit instable et s'étrangle spontanément : il se forme une bulle à l'arrière dont le rayon ρ est contrôlé par la capillarité. Plusieurs arguments montrent que ρ est d'ordre $(d\ell_D)^{1/2}$.

Une question intéressante est le raccordement d'un sillon à ses voisins : existe-t-il une condition de solvabilité qui fixerait le vecteur d'onde d'une structure stationnaire ? On montre facilement que le raccordement est toujours possible pour un sillon infini. Pour un sillon fermé, la réponse est moins claire — mais il semble qu'elle reste inchangée : il n'y a pas de condition de solvabilité.

La formation de sillons pose en fait de nombreuses questions intéressantes. La perte de charge visqueuse due à l'advection du liquide dans un sillon étroit pourrait poser problème : elle semble en fait négligeable. Par ailleurs, la fermeture du sillon crée des *gouttes liquides* emprisonnées dans la matrice solide. On peut calculer le domaine de stabilité de ces gouttes (stabilisées par la décompression élastique du solide) — et aussi leur mobilité dans un gradient thermique : on constate que les gouttes avancent moins vite que le front et prennent du retard.

4) Stabilité de phase d'une structure cellulaire : instabilité d'Eckhaus

On considère une structure cellulaire stable en amplitude, de vecteur d'onde k : est-elle stable en k ? Pour répondre à cette question, il faut noter que la nucléation d'arches nouvelles est un processus difficile qui demande le franchissement d'une barrière de potentiel (du moins aux faibles amplitudes : lorsque l'amplitude croît, on peut avoir coalescence ou scission d'une arche). Pour un système de dimension donnée, le nombre total d'arches est donc constant : on peut seulement faire fluctuer leur densité locale, les comprimant en un point et les dilatant en un autre — c'est l'instabilité d'Eckhaus où la *phase* de la structure cellulaire se déforme le long de l'interface.

L'analyse est très simple pour un système potentiel, où l'on peut définir l'énergie $E(k)$ de la structure cellulaire de départ. Le « gaz d'arches » est stable si sa « compressibilité » est positive, c'est-à-dire si $E''(k) > 0$. Si E'' est négatif, la longueur d'onde fluctue spontanément. Pour une bifurcation typique en $k = k_c$, la structure cellulaire existe dans un domaine ($k_c \pm \Delta k$) : on montre qu'elle est stable en phase dans la région plus restreinte ($k_c \pm \Delta k / \sqrt{3}$).

La transposition à un système dynamique est plus délicate, mais conduit aux mêmes conclusions. Les calculs sont simples si on se limite *aux déformations de faible amplitude*. Le déplacement de l'interface est écrit sous la forme

$$\zeta(x) = \zeta_k e^{ikx} [1 + \eta(x)] + \text{comp. conj.}$$

où $\eta \ll 1$ décrit la fluctuation, de vecteur d'onde $q \ll k$ (les parties réelles et imaginaires de η traduisent respectivement les modulations d'amplitude et de phase). En séparant les régions de l'espace des phases proches de $+k$ et $-k$, et au premier ordre en η , on écrit facilement des équations de mouvement couplées pour ζ_{k+q} et ζ_{-k+q} , c'est-à-dire pour η_q et η_{-q}^* . La relation de dispersion correspondante donne immédiatement l'instabilité d'Eckhaus, montrant clairement la séparation des modes d'amplitude et des modes de phase (elle reste d'ailleurs valable si $q \sim \Delta k$: on vérifie ainsi que l'instabilité d'Eckhaus apparaît à $q = 0$). Cette formulation très simple souligne les dangers d'un traitement trop naïf du couplage mode-mode.

Le cours a été rédigé sous forme de notes distribuées à l'auditoire. Il se poursuivra l'an prochain par une discussion plus approfondie des structures cellulaires (sélection de longueur d'onde, réseaux bidimensionnels) et par l'étude des structures développées (doigts et dendrites).

P. N.

SÉMINAIRES

Les séminaires suivants ont été organisés, en liaison étroite avec le thème du cours :

29 novembre 1988, D. SALIN (Paris VI), « Instabilités dans les ferrofluides ».

6 décembre 1988, D. SORNETTE (Nice), « Stabilité des domaines magnétiques en rubans. Analogie avec les cristaux liquides ».

13 décembre 1988, P. PELCÉ (Marseille), « Instabilités dans les fronts de flamme ».

24 janvier 1989, C. GUTHMANN (G.P.S. Paris VII), « Instabilités morphologiques en solidification directionnelle : expériences sur des alliages transparents ».

31 janvier 1989, J. BECHHOEFER (Orsay), « Croissance directionnelle des cristaux liquides ».

ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES

1. P. NOZIÈRES anime le *groupe de Physique Théorique* de l'Institut Laue-Langevin à Grenoble. Ce groupe comprend une dizaine de physiciens confirmés qui y effectuent des séjours de durée limitée, de un à cinq ans, et travaillent dans des domaines très divers. En 1988, l'activité portait sur les domaines suivants :

Supraconducteurs (CAPELLMANN, LAVAGNA, RODRIGUEZ).

Hélium 3 superfluide (SCHOPOHL).

Phases amphiphiles (MAGGS).

L'activité personnelle de P. Nozières a porté sur les thèmes suivants :

a) *Croissance cristalline*

Le travail sur la cinétique de croissance de ^3He , avec F. GRANER et R. BOWLEY, a été mené à terme. La chaleur latente est relâchée essentiellement du côté liquide, et doit retraverser la résistance Kapitza R_K de l'interface pour être évacuée via le solide — d'où une mesure très originale de R_K . Nous avons clarifié la thermodynamique de ces processus, et amélioré le calcul théorique de R_K en tenant compte des degrés de liberté transverses dans les deux phases. L'accord avec l'expérience est bon. Le mécanisme qui contrôle la croissance isotherme reste en revanche incompris.

L'influence du facettage sur l'instabilité de croissance a été élucidée, en collaboration avec l'équipe du G.P.S. Jussieu : les résultats sont décrits dans le cours.

Enfin, une étude est en cours sur la fusion de surface et son influence sur le facettage, en liaison avec des expériences menées à Marseille. L'existence de marches cristallines sur une surface vicinale peut favoriser le mouillage, observé indirectement par la taille des facettes et leur raccordement aux parties arrondies. On explique ainsi les phénomènes de surchauffe observés près du point triple.

Publications

R. BOWLEY, B. CAROLI, C. CAROLI, F. GRANER, P. NOZIÈRES, B. ROULET, « On directional solidification of a faceted crystal », *Journal de Physique*, **50**, 1377 (1989).

b) *Rhéologie des suspensions*

Grâce à une définition très précise des quantités moyennes, un certain nombre de paradoxes ont pu être éclaircis. On vérifie ainsi que la force

moyenne sur les particules et le tenseur d'efforts moyen n'ont pas une définition unique (ils dépendent du détail des forces à l'intérieur des grains solides). Mais, bien sûr, l'équation résultante est invariante. A condition de faire un choix *cohérent*, on a une certaine latitude — en particulier le caractère symétrique ou non du tenseur d'efforts est une question de définition. On précise ainsi le modèle phénoménologique avancé il y a deux ans — qui devrait permettre de mieux comprendre les phénomènes d'écran, dans une suspension ou dans un milieu poreux, en analogie étroite avec l'électrostatique.

2. Outre cette activité centrée à Grenoble, un petit groupe travaille au Collège même, autour de D. SAINT JAMES, en étroite collaboration avec C. ASLANGUL et N. POTTIER, tous deux membres du Groupe de Physique des Solides de l'Université Paris VII. Leurs travaux récents portent sur le mouvement brownien d'une particule sur un réseau désordonné à une dimension.

a) *Mouvement sur un réseau périodique dont la période tend vers l'infini*

Utilisant une modélisation due à Derrida, on suppose que les probabilités de saut W sont périodiques avec une période N . En faisant tendre N vers l'infini on espère ainsi restituer un réseau complètement désordonné. On peut ainsi calculer la vitesse moyenne v et le coefficient de diffusion D , qui font intervenir diverses moyennes des probabilités de saut, à droite et à gauche. On peut interpréter ce résultat en considérant que le système est équivalent, à grand temps, à une marche dirigée sur un réseau renormalisé dans l'espace, pour lequel la distance entre les nouveaux sites tient compte de la possibilité des retours vers la gauche dans le réseau initial.

Nous avons aussi étudié le cas où la distribution des W est telle qu'il ne peut pas exister de vitesse finie. En particulier, nous traitons celui où $W_{m,n} = \exp(\pm a \phi_{m,n})$ (+ pour $m > n$, - pour $m < n$), et où les ϕ ont une distribution gaussienne de valeur moyenne m et de variance σ . On montre que dans ce cas la vitesse est finie pour $\mu = m/a \sigma > 1$ (a, pas du réseau), nulle dans le cas inverse. Pour $\mu > 1$ nous montrons également que la relation d'Einstein entre vitesse et coefficient de diffusion n'est plus vérifiée.

b) *Mouvement sur un réseau infini désordonné*

En collaboration avec J.-P. Bouchaud et A. Georges, nous avons envisagé la démonstration directe des résultats ci-dessus, sans passer par l'artifice du réseau périodique dont la période tend vers l'infini.

Pour une marche *dirigée* sur un échantillon infini, nous avons pu montrer que la vitesse v et le coefficient de diffusion D sont égaux, avec probabilité 1, au résultat donné par Derrida pour un réseau périodique de période infinie. En d'autres termes, ils ne présentent aucune fluctuation d'échantillon à échantillon : ce sont des *quantités automoyennantes*.

Ces résultats sont logiques d'un point de vue physique : on s'attend en effet à ce qu'un théorème de limite centrale soit valable, avec une forme limite de la distribution de position indépendante de l'échantillon particulier (en fait la gaussienne habituelle dans le cas où v et D existent).

Publications

C. ASLANGUL, N. POTTIER, D. SAINT JAMES, « Intermediate time dynamics of a particle on a disordered tight-binding lattice : quantum dissipation versus disorder », *Physica*, à paraître.

C. ASLANGUL, N. POTTIER, D. SAINT JAMES, « Velocity and diffusion coefficient of a random one dimensional hopping model », *Journal de Physique*, 50, 899 (1989).

C. ASLANGUL, J.-P. BOUCHAUD, A. GEORGES, N. POTTIER, D. SAINT-JAMES, « Exact results and self-averaging properties for random walks on a one-dimensional infinite lattice », *Journal of Statistical Physics*, 55, 461 (1989).

Congrès : Neuvième Rencontre de Physique Statistique, Paris 1989

C. ASLANGUL, J.-P. BOUCHAUD, A. GEORGES, N. POTTIER, D. SAINT-JAMES, « Exact results and self-averaging properties for random walks on a one-dimensional infinite lattice ».

CONFÉRENCES DONNÉES PAR P. NOZIÈRES

Grenoble, 8 juillet 1988, « Quelques remarques sur l'hydrodynamique des suspensions ».

E.S.P.C.I. Paris, 30 Janvier 1989, « L'hélium : matériau quantique ou matériau classique ? ».

DISTINCTIONS

P. NOZIÈRES a reçu en décembre 1988 la Médaille d'Or du Centre National de la Recherche Scientifique.