

## Théorie des groupes

Jacques TITS, membre de l'Institut  
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année a été consacré aux *immeubles jumelés* (le titre annoncé était « Immeubles doubles », mais j'ai entre-temps adopté une terminologie un peu différente, et plus souple, suggérée par G. Rousseau).

La notion d'immeuble, qui a son origine dans un essai d'interprétation géométrique unifiée des groupes de Lie exceptionnels, s'est avérée un outil commode pour l'étude de diverses questions concernant les groupes algébriques simples — sur un corps quelconque ou sur un corps local — et, plus récemment, des groupes de Kac-Moody. Un cas particulier important est celui des *immeubles sphériques* (ou « de type sphérique »), c'est-à-dire à groupe de Weyl fini, pour lesquels on dispose de concepts et de résultats nombreux (automorphismes, propriété de Moufang, classification, ...), sans équivalents pour les immeubles quelconques et qui font apparaître une certaine rigidité de la notion d'immeuble dans ce cas-là. Il est vrai qu'une rigidité analogue se retrouve dans le cas affine (voir le cours de l'année 1983-1984) et peut-être dans d'autres cas encore, mais des procédés de construction d'immeubles dus à M. Ronan et l'auteur montrent qu'au moins pour des types assez généraux, la notion d'immeuble est beaucoup plus « molle ». Si l'on analyse les raisons de cette spécificité du cas sphérique, on constate que l'existence de *chambres opposées*, résultant du fait que le groupe de Weyl possède un élément de plus grande longueur, en est un ingrédient essentiel : elle joue en effet un rôle majeur dans les démonstrations de toutes les propriétés particulières au cas sphérique. Or, il est une situation maintenant bien connue, celle des groupes de Kac-Moody, où l'on rencontre des sous-groupes de Borel opposés sans pour autant que le groupe de Weyl soit fini, mais de tels sous-groupes ne sont pas conjugués et donnent donc naissance à des *immeubles distincts*. Partant de cette constatation et souhaitant étendre à des situations plus générales certains arguments utilisés dans l'étude des immeubles sphériques, M. Ronan a eu l'idée de chercher à attribuer aux chambres d'un immeuble quelconque, ou en

tout cas non sphérique, des *chambres opposées* qui seraient *situées dans un autre immeuble*. La formalisation de cette idée a conduit à la notion d'*immeubles jumelés*, qui a fait l'objet du cours et dont l'étude sera poursuivie l'an prochain. Le but est évidemment de généraliser autant que possible aux paires d'immeubles jumelés toute la théorie des immeubles sphériques (il s'agit en effet d'une généralisation car tout immeuble sphérique possède un unique « jumeau »). En particulier, on a en vue des théorèmes de classification qui fourniraient notamment une approche géométrique naturelle des groupes de Kac-Moody. On verra ci-après et dans le cours de l'an prochain les réussites et les limites de ce programme. Les résultats exposés sont le fruit d'une collaboration avec M. Ronan.

## 1. Immeubles : rappels

1.1. Soit  $I$  un ensemble fini. Tous les *complexes* dont il sera question seront des complexes simpliciaux (abstrait) dotés d'une application, appelée *type*, de l'ensemble des sommets dans  $I$ , application dont la restriction à tout simplexe est injective. Sauf mention du contraire, les morphismes de complexes seront toujours supposés compatibles avec le type. Les simplexes de type  $I$  sont appelés *chambres*. Pour toute partie  $X$  d'un complexe, l'ensemble des chambres contenues dans  $X$  est noté  $\text{Cham } X$ .

1.2. Soit  $M = (m_{ij})_{i,j \in I}$  une matrice de Coxeter (cela veut dire que  $m_{ij} = m_{ji} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $m_{ii} = 1$  pour tout  $i$  et  $m_{ij} \geq 2$  si  $i \neq j$ ). Notons  $(W(M), S(M))$ , ou simplement  $(W, S)$ , le système de Coxeter correspondant :  $S = \{s_i \mid i \in I\}$  est indexé par  $I$ ,  $W$  est un groupe engendré par  $S$  et les relations

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \text{ lorsque } m_{ij} \neq \infty$$

en forment une présentation. Pour  $J \subset I$ , soit  $W^J$  le sous-groupe de  $W$  engendré par les  $s_j, j \notin J$  ; si  $J = \{i\}$ , on pose  $W^J = W^i$ . Un *complexe de Coxeter de type  $M$*  est un complexe  $\Sigma$  isomorphe au *complexe de Coxeter standard  $\Sigma(M)$*  dont les sommets de type  $i$  sont les éléments de  $W/W^i$  et dont les simplexes sont les ensembles de sommets d'intersection non vide (les sommets en question étant vus comme sous-ensembles de  $W$ ). Tout isomorphisme  $\alpha : \Sigma \rightarrow \Sigma(M)$  définit une bijection  $\alpha_* : \text{Cham } \Sigma \rightarrow W$  (si  $c \in \text{Cham } \Sigma$ ,  $\alpha_*(c)$  est l'unique élément de  $W$  contenu dans tous les sommets de  $c$ , considérés comme des parties de  $W$ ) et, pour  $c, c' \in \text{Cham } \Sigma$ , l'élément  $w_{\Sigma}(c, c') = \alpha_*(c)^{-1} \cdot \alpha_*(c')$  de  $W$  ne dépend que de  $c$  et  $c'$  et non du choix de l'isomorphisme  $\alpha$  ; on l'appelle la  *$W$ -distance*, ou simplement *distance* de  $c$  et  $c'$ .

1.3. Un *système d'appartements de type  $M$*  dans un complexe  $\Delta$  est un

ensemble  $\mathcal{A}$  de sous-complexes de Coxeter de type  $M$  appelés *appartements* tels que, quels que soient deux simplexes  $x$  et  $x'$  de  $\Delta$  :

(SA 1) il existe un appartement contenant  $x$  et  $x'$  ;

(SA 2) si  $A, A' \in \mathcal{A}$  contiennent  $x$  et  $x'$ , il existe un isomorphisme de  $A$  sur  $A'$  fixant  $x$  et  $x'$ .

On sait qu'un même complexe  $\Delta$  ne peut posséder deux systèmes d'appartements de types différents et que

1.3.1. *La réunion d'une famille quelconque de systèmes d'appartements est aussi un système d'appartements.*

Un complexe  $\Delta$  est appelé *immeuble de type  $M$*  s'il possède un système d'appartements de type  $M$ . (Dans certaines publications, on exige en outre que  $\Delta$  soit *épais*, c'est-à-dire que toute *cloison* — simplexe de type  $I - \{i\}$  pour  $i \in I$  — soit contenue dans au moins trois chambres.)

1.4. Soit  $\Delta$  un immeuble de type  $M$ . Il résulte aussitôt de 1.3.1. et de (SA 2) que si  $c, c' \in \text{Cham } \Delta$  et si  $\mathcal{A}$  est un système d'appartements dans  $\Delta$ , la distance  $w_A(c, c')$  de  $c$  et  $c'$  dans un appartement  $A \in \mathcal{A}$  qui les contient ne dépend que de  $c$  et  $c'$  et non du choix de  $\mathcal{A}$  ou de  $A$  ; on la note  $w_\Delta(c, c')$ , ou simplement  $w(c, c')$ . Il est facile de voir que l'on peut reconstruire  $\Delta$  de façon unique à partir de l'ensemble  $\mathcal{C} = \text{Cham } \Delta$  et de la fonction  $w : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow W$ . Par exemple, les simplexes de type  $J \subset I$  de  $\Delta$  sont en bijection canonique avec les parties  $X \subset \mathcal{C}$  maximales telles que  $w(X \times X) \subset W^{I-J}$  ; un tel ensemble  $X$ , ensemble des chambres contenant un simplexe  $x$  donné de type  $J$  est appelé *l'étoile* de  $x$  et noté  $\text{Ét } x$ .

Pour qu'un couple  $(\mathcal{C}, w : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow W)$  détermine effectivement un immeuble, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux axiomes suivants, où  $c, c'$  sont des éléments quelconques de  $\mathcal{C}$  et l'on pose  $w = w(c, c')$  :

(Im 0)  $w = 1$  si et seulement si  $c = c'$  ;

(Im 1) si  $x \in \mathcal{C}$  et  $w(c', x) = s \in S$ , alors  $w(c, x) \in \{w, ws\}$  ; si, de plus,  $l(ws) = l(w) + 1$  (où  $l$  désigne la longueur dans le système de Coxeter  $(W, S)$ ), on a  $w(c, x) = ws$  ;

(Im 2) si  $s \in S$ , il existe  $x \in \mathcal{C}$  tel que  $w(c', x) = s$  et  $w(c, x) = ws$ .

Il sera commode de considérer les immeubles tantôt comme des complexes simpliciaux, tantôt comme des « ensembles de chambres »  $\mathcal{C}$  dotés d'une  $W$ -distance satisfaisant aux axiomes (Im 0) à (Im 2).

*Remarques.* (a) La première condition de (Im 1) ne doit être exigée que pour  $w \in S$  ; le cas général s'ensuit compte tenu des autres axiomes.

(b) On a  $w(c', c) = w(c, c')^{-1}$ .

1.5. *Exemples.* (a) Soient  $\mathcal{G}$  un groupe algébrique semi-simple défini sur un corps  $k$  et  $\mathfrak{P}$  un  $k$ -sous-groupe parabolique minimal. On a une bijection  $\beta$  (*décomposition de Bruhat*) de l'ensemble de doubles classes  $\mathfrak{P}(k) \backslash \mathcal{G}(k) / \mathfrak{P}(k)$  sur le groupe de Weyl relatif  $W$  de  $\mathcal{G}$  sur  $k$ . Cela étant, le couple  $(\mathcal{C} = \mathcal{G}(k) / \mathfrak{P}(k), w)$  défini par  $w(c, c') = \beta(c^{-1}c')$  (où  $c$  et  $c'$  sont des classes à gauche de  $\mathfrak{P}(k)$  dans  $\mathcal{G}(k)$ ) est l'*immeuble (sphérique)* de  $\mathcal{G}$  sur  $k$ .

(b) Soient  $\mathcal{G}, \mathfrak{P}$  comme ci-dessus,  $\mathcal{G}$  étant en outre supposé simplement connexe. Posons  $K = k((t))$  (corps des séries formelles de Laurent) et soit  $P \subset \mathcal{G}(K)$  l'image réciproque de  $\mathfrak{P}(k)$  par l'homomorphisme  $\mathcal{G}(k[[t]]) \rightarrow \mathcal{G}(k)$  de réduction mod.  $t$ . On a à nouveau une décomposition de Bruhat  $\beta : P \backslash \mathcal{G}(K) / P \rightarrow W$ , où  $W$  est cette fois le groupe de Weyl affine de  $\mathcal{G}$  sur  $K$ , et  $(\mathcal{G}(K) / P, w : (c, c') \mapsto \beta(c^{-1}c'))$  est l'*immeuble affine* de  $\mathcal{G}$  sur  $K$ . Ceci est un cas particulier de résultats de F. Bruhat et l'auteur sur les groupes réductifs sur un corps local (*Publ. Math. I.H.E.S.* 41 (1972), 5-251 et 60 (1984), 5-184).

(c) si  $M = \binom{1}{\alpha} \gamma$ , un immeuble de type  $M$  est un arbre sans sommet pendant.

## 2. Jumelages

2.1. Plutôt que d'axiomatiser la notion de chambres opposées (voir l'introduction), il est plus commode de fonder la définition des paires d'immeubles jumelés sur l'introduction d'une *codistance* entre couples de chambres  $c, c'$ ; en termes heuristiques, cette codistance mesurera le minimum de la  $W$ -distance de  $c'$  à une chambre opposée à  $c$  (voir la proposition 1 ci-dessous). Un *jumelage* est un système formé de deux immeubles  $\Delta_+ = (\mathcal{C}_+, w_+)$ ,  $\Delta_- = (\mathcal{C}_-, w_-)$  (de même type  $M$ ) et d'une fonction  $w^* : ((\mathcal{C}_+ \times \mathcal{C}_-) \cup (\mathcal{C}_- \times \mathcal{C}_+)) \rightarrow W$  possédant les propriétés suivantes, où  $(c, c') \in (\mathcal{C}_+ \times \mathcal{C}_-) \cup (\mathcal{C}_- \times \mathcal{C}_+)$ ,  $w = w^*(c, c')$ ,  $s \in S$ ,  $\mathcal{C}'$  désigne celui des deux ensembles  $\mathcal{C}_+$  et  $\mathcal{C}_-$  qui contient  $c'$  et les fonctions  $w_+, w_-$  sont simplement notées  $w$  (cette convention sera adoptée dans toute la suite sauf, pour raisons évidentes, en 2.3 (b)) :

$$(J1) \quad w^*(c', c) = w^*(c, c')^{-1};$$

$$(J2) \quad \text{si } x \in \mathcal{C}', w(c', x) = s \text{ et } l(ws) = l(w) - 1, \text{ alors } w^*(c, x) = ws;$$

$$(J3) \quad \text{il existe } x \in \mathcal{C}' \text{ tel que } w(c', x) = s \text{ et } w^*(c, x) = ws.$$

Par abus de langage, on parlera aussi du « jumelage  $w^*$  ».

2.2. Deux chambres  $c \in \mathcal{C}_+$  et  $c' \in \mathcal{C}_-$  sont dites *opposées* (pour le jumelage  $w^*$ ) si  $w^*(c, c') = 1$ . La relation d'opposition détermine le jumelage; en effet :

PROPOSITION 1. — Pour  $c \in \mathcal{C}_+$  et  $c' \in \mathcal{C}_-$ ,  $w^*(c, c')$  est l'unique élément de longueur minimum dans l'ensemble

$$\{w(x, c') \mid x \in \mathcal{C}', x \text{ est opposé à } c\}$$

2.3. Exemples. (a) Si  $\Delta$  est un complexe de Coxeter, il existe un et, à isomorphisme près, un seul jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  tel que  $\Delta_+ = \Delta$ , à savoir  $(\Delta, \Delta, w)$ .

(b) Si  $\Delta = (\mathcal{C}, w)$  est un immeuble de type  $M$  sphérique, il existe un et, à isomorphisme près, un seul jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  tel que  $\Delta = \Delta_+$ . Si  $w^\circ$  désigne l'élément de longueur maximum de  $W$ , on a  $\Delta_- = (\mathcal{C}, w^\circ w w^\circ)$  (c'est-à-dire que  $\Delta_-$  n'est autre que l'immeuble  $\Delta$  lui-même dont on compose l'application type avec l'involution d'opposition  $i \mapsto i'$ , définie par  $s_{i'} = w^\circ s_i w^\circ$ ) et, pour  $c \in \mathcal{C}_+ = \mathcal{C}$  et  $c' \in \mathcal{C}_- = \mathcal{C}$ ,  $w^*(c, c') = w^\circ w(c, c')$ , d'où  $w^*(c', c) = w^\circ w_-(c', c)$ .

(c) Soient  $G$  un groupe de Kac-Moody sur un corps  $k$  et  $B_+, B_-$  deux sous-groupes de Borel opposés : avec les notations du § 3 de « Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields » (*J. of Algebra* 105 (1987), 542-573), cela veut dire que  $G = \mathfrak{G}(k)$ ,  $B_+ = \mathfrak{T}(k) \cdot \mathfrak{U}_+(k)$  et  $B_- = \mathfrak{T}(k) \cdot \mathfrak{U}_-(k)$ . (Plus généralement, on pourrait prendre pour  $G, B_+, B_-$  les groupes  $G, B, B_-$  du § 5 de *loc. cit.* ; voir d'ailleurs les n<sup>os</sup> 8.1 et 8.2 ci-dessous.) Vu les résultats de *loc. cit.*, on a un groupe de Weyl  $W$  et des décompositions de Bruhat  $B_+ \backslash G / B_+ \rightarrow W$ ,  $B_- \backslash G / B_- \rightarrow W$ , d'où des immeubles  $\Delta_+ = (G/B_+, w_+)$ ,  $\Delta_- = (G/B_-, w_-)$ , définis exactement comme en 1.5, exemples (a) et (b). On a aussi une bijection canonique  $\beta^* : B_+ \backslash G / B_- \rightarrow W$  (« décomposition de Birkhoff » : cf. *loc. cit.*, 5.13), et l'on montre que le triple  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$ , où  $w^* : (G/B_+) \times (G/B_-) \rightarrow W$  est défini par

$$(1) \quad w^*(c, c') = \beta^*(c^{-1}c') \quad (c \in G/B_+, c' \in G/B_-),$$

est un jumelage.

(d) Soient  $\mathfrak{G}, \mathfrak{P}$  comme en 1.5 (a) et soit  $\mathfrak{P}'$  un  $k$ -sous-groupe parabolique minimal de  $\mathfrak{G}$  opposé à  $\mathfrak{P}$ . De même qu'en 1.5 (b), on suppose  $\mathfrak{G}$  simplement connexe, mais l'on pose, cette fois,  $G = \mathfrak{G}(k[t, t^{-1}])$ . Soient  $P_+, P_-$  les images réciproques de  $\mathfrak{P}(k)$  et  $\mathfrak{P}'(k)$  par les homomorphismes de réduction  $\mathfrak{G}(k[t]) \rightarrow \mathfrak{G}(k)$  et  $\mathfrak{G}(k[t^{-1}]) \rightarrow \mathfrak{G}(k)$ , et  $W$  le groupe de Weyl affine du système de racines relatives non multipliables de  $\mathfrak{G}$ . On a, à nouveau, des bijections  $P_+ \backslash G / P_+ \rightarrow W$ ,  $P_- \backslash G / P_- \rightarrow W$ ,  $P_+ \backslash G / P_- \rightarrow W$  qui définissent, via (1), un jumelage  $(G/P_+, G/P_-, w^*)$ . Lorsque  $\mathfrak{G}$  est déployé, cet exemple est cas particulier du précédent.

### 3. Simplexes opposés. Appartements. Connexité de l'ensemble des couples de chambres opposées

3.1. Rappelons que, dans un immeuble de type  $M$ , l'étoile  $\acute{E}t x$  d'un simplexe  $x$  de type  $J$  (cf. 1.4) est un immeuble de type  $M \mid_{(I-J) \times (I-J)}$ . On

conserve les notations du § 2 ; en particulier,  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  désigne un jumelage d'immeubles de type  $M$ . Un simplexe  $x$  de  $\Delta_+$  et un simplexe  $x'$  de  $\Delta_-$  sont dits *opposés* s'ils sont de même type et si  $\text{Ét } x$  et  $\text{Ét } x'$  contiennent des chambres opposées.

PROPOSITION 2. — *Si  $x$  et  $x'$  sont des simplexes opposés, la restriction de  $w^*$  à  $\text{Ét } x \times \text{Ét } x'$  est un jumelage.*

C'est facile à voir.

COROLLAIRE 1. — *Si  $x, x'$  sont des cloisons opposées (cf. 1.3), la relation de non-opposition entre chambres définit une bijection  $\text{Ét } x \rightarrow \text{Ét } x'$ .*

Cela résulte de la proposition 2 et de l'exemple 2.3 (b).

3.2. Soit  $\varepsilon = +$  ou  $-$ . Si  $c \in \mathcal{C}_\varepsilon$  et  $c' \in \mathcal{C}_{-\varepsilon}$  sont deux chambres opposées, on pose  $A(c, c') = \{x \in \mathcal{C}_\varepsilon \mid w(c, x) = w^*(c', x)\}$ .

PROPOSITION 3. — (i) *Si  $c_1 \in A(c, c')$  et  $c'_1 \in A(c', c)$  sont des chambres opposées, alors  $A(c_1, c'_1) = A(c, c')$ .*

(ii) *L'ensemble  $\mathcal{A}(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  des  $A(c, c')$  pour  $c \in \mathcal{C}_+$  et  $c' \in \mathcal{C}_-$  opposées, est un système d'appartements dans  $\Delta_+$ .*

(iii) *La restriction de  $w^*$  à  $A(c, c') \times A(c', c)$  est un jumelage de complexes de Coxeter et définit donc, vu 2.3 (a), un « isomorphisme d'opposition » de  $A(c, c')$  sur  $A(c', c)$ .*

Les éléments de  $\mathcal{A}(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  sont appelés les *appartements* de  $\Delta_+$  (relatifs au jumelage  $w^*$ ), et les appartements  $A(c, c') \in \mathcal{A}(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  et  $A(c', c) \in \mathcal{A}(\Delta_-, \Delta_+, w^*)$  sont dits *associés*. Alors qu'un immeuble  $\Delta$  peut posséder plusieurs systèmes d'appartements, on voit que la donnée d'un jumelage auquel participe  $\Delta$  privilégie un tel système.

PROPOSITION 4. — *Si  $A \in \mathcal{A}(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$ ,  $A' \in \mathcal{A}(\Delta_-, \Delta_+, w^*)$  et  $c \in \mathcal{C}_+$ , le nombre de chambres de  $A'$  opposées à  $c$  est égal ou strictement supérieur à 1 selon que  $c$  appartient ou non à  $A$ .*

3.3. Rappelons que deux chambres  $x, y$  d'un immeuble sont dites *adjacentes* si  $l(w(x, y)) = 1$  (autrement dit, si  $w(x, y) \in S$ ), et qu'une *galerie* est une suite de chambres  $x_0, x_1, \dots, x_m$  telle que  $l(w(x_{i-1}, x_i)) \leq 1$  pour  $1 \leq i \leq m$ . Disons que deux couples de chambres opposées  $(c, c')$  et  $(d, d')$  sont *voisins* si  $c$  et  $d$  sont égales ou adjacentes, de même que  $c'$  et  $d'$ .

PROPOSITION 5. — *L'ensemble des couples de chambres opposées est connexe pour la relation de voisinage définie ci-dessus.*

Il s'agit de montrer que deux couples de chambre opposées  $(c, c')$  et  $(d, d')$  peuvent être connectés par une suite de tels couples, telle que deux éléments

consécutifs quelconques de la suite soient voisins. On commence par construire une suite reliant  $(c, c')$  à un couple de la forme  $(d, d'_1)$ , ce qui est facile. On choisit ensuite une galerie  $d'_1, d'_2, \dots, d'_m = d'$ , et l'on observe que si  $d_i$  désigne la chambre de l'appartement  $A(d, d')$  telle que  $w(d, d_i) = w^*(d, d'_i)$ , alors  $d_1 = d_m = d$ , les chambres  $d_i$  et  $d'_i$  sont opposées pour tout  $i$  et deux éléments consécutifs quelconques de la suite de couples  $(d_1, d'_1), \dots, (d_m, d'_m)$  sont voisins. Cela prouve l'assertion.

#### 4. Automorphismes

Le théorème suivant, qui généralise le théorème 4.1.1 de « *Buildings of spherical type and finite BN-pairs* » (*Springer Lecture Notes in Math.* 386 (1974)), met en évidence une certaine *rigidité* des jumelages. Il implique que si les immeubles  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  participant à un jumelage sont localement finis, le groupe des automorphismes du jumelage est dénombrable et discret pour la topologie naturelle (engendrée par les fixateurs de chambres). Ainsi, dans l'exemple (d) de 2.3, si le corps  $k$  est fini, le groupe  $\text{Aut } \Delta_+$  est un groupe localement compact non discret (donc non dénombrable) tandis que  $\text{Aut } (\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  est un sous-groupe discret (en fait, arithmétique) de celui-là. Cela montre, soit dit en passant, que l'immeuble  $\Delta_+$  participe à une infinité non dénombrable de jumelages « différents » en ce sens que, pour deux quelconques d'entre eux, l'identité de  $\Delta_+$  ne se prolonge pas en un isomorphisme de jumelages.

THÉORÈME 1. — *Supposons  $\Delta_+$  épais (cf. 1.3) et soient  $c \in \mathcal{C}_+$  et  $c' \in \mathcal{C}_-$  des chambres opposées. Alors, le seul automorphisme du jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  qui fixe  $c, c'$  et toute chambre adjacente à  $c$  est l'identité.*

En effet, soit  $\psi$  un automorphisme ayant les propriétés en question et, pour toute chambre  $x \in \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$ , notons  $E(x)$  l'ensemble constitué par toutes les chambres (de  $\Delta_+$  ou  $\Delta_-$ ) adjacentes à  $x$ . Nous devons montrer que si  $d \in \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$ , alors  $\psi(d) = d$ . Soit  $c_0 = c, c_1 = c', c_2, \dots, c_m = d$  une suite de chambres appartenant alternativement à  $\mathcal{C}_+$  et  $\mathcal{C}_-$ , telle que  $c_i$  et  $c_{i+1}$  soient opposées pour  $0 \leq i \leq m-1$  et que  $c_i$  et  $c_{i+2}$  soient égales ou adjacentes pour  $0 \leq i \leq m-2$ ; l'existence d'une telle suite résulte aussitôt de la proposition 5 et du fait que  $\Delta_+$  (donc aussi  $\Delta_-$ , vu le corollaire 1 du n° 3.1) est épais. On déduit alors du corollaire 1, par induction sur  $i$ , que pour  $0 \leq i \leq m-2$ ,  $\psi$  fixe  $E(c_i)$ , donc  $c_{i+2}$ , et aussi  $c_{i+1}$ . Pour  $i = m-2$ , cela donne la relation cherchée.

#### 5. Demi-appartements. Les groupes $U(D, D')$ . Propriété de Moufang

Désormais, on supposera toujours que  $\Delta_+$  (donc aussi  $\Delta_-$ ) est épais.

5.1. Si  $c, c'$  sont deux chambres adjacentes d'un complexe de Coxeter  $\Sigma$ , notons  $\rho(c, c')$  l'ensemble des chambres  $x$  telles que  $l(w(c, x)) < l(w(c', x))$ .

Les ensembles de chambres de la forme  $\rho(c, c')$  s'appellent *racines* de  $\Sigma$ . Les racines  $\rho(c, c')$  et  $\rho(c', c)$  sont dites *complémentaires* (plutôt que « opposées », suivant la terminologie reçue, vu l'usage différent et répété que nous faisons de ce dernier vocable) : on a  $\rho(c', c) = \text{Cham } \Sigma - \rho(c, c')$ , d'où la convention d'écriture  $\rho(c', c) = -\rho(c, c')$  que nous adopterons. Le *mur* d'une racine  $\rho \subset \text{Cham } \Sigma$  est l'ensemble  $\partial\rho$  des cloisons  $d$  de  $\Sigma$  (cf. 1.3) telles qu'une et une seule des chambres de  $\Sigma$  ayant  $d$  comme cloison, appartienne à  $\rho$ , l'autre appartenant donc à  $-\rho$  ; on a  $\partial\rho = \partial(-\rho)$ .

Dans un immeuble doté d'un système d'appartements (par exemple, un immeuble participant à un jumelage), une racine (resp. un mur) d'appartement est appelé(e) *demi-appartement* (resp. *mur*) de l'immeuble.

5.2. Des demi-appartements  $D, D'$  de deux immeubles jumelés  $\Delta_+, \Delta_-$  sont dits *associés* s'il existe des appartements associés  $A, A'$  tels que  $D$  (resp.  $D'$ ) soit une racine de  $A$  (resp.  $A'$ ) et que l'on ait  $D' = -D^\circ$ , où  $^\circ : A \rightarrow A'$  désigne l'isomorphisme d'opposition (cf. proposition 3 (iii)).

5.3. *Remarque.* Il n'est en général pas vrai que l'associé de tout appartement contenant  $D$  contient  $D'$  ni, par conséquent, qu'un demi-appartement possède un unique associé. L'exemple suivant est typique. Soient  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  le jumelage défini à partir du groupe  $\text{SL}_2(k[t, t^{-1}])$ , pour  $k$  un corps (cf. 2.3 (d)), et  $c$  (resp.  $c'$ ) la chambre de  $\Delta_+$  (resp.  $\Delta_-$ ) fixée par le sous-groupe formé par les matrices  $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(k[t, t^{-1}])$  telles que

$$e, f, h \in k[t] \text{ et } g \in t \cdot k[t]$$

$$\text{(resp. } e, g, h \in k[t^{-1}] \text{ et } f \in t^{-1} \cdot k[t^{-1}]).$$

Posons  $A = A(c, c')$  et  $A' = A(c', c)$ . Ces appartements associés sont fixés par le groupe  $\{ \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \mid e \in k^\times \}$ , propriété qui les caractérise dès que  $\text{card } k \geq 4$ . Soit  $D$  (resp.  $D'$ ) l'ensemble des transformées de  $c$  (resp.  $c'$ ) par les matrices

$$\begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & t^{-n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t^{n-1} \\ -t^{-n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

pour  $n \leq 0$  (resp.  $> 0$ ). Les ensembles  $D$  et  $D'$  sont des demi-appartements associés. Pour  $f \in k[t]$  et  $u = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $uD = D \subset uA$  ; en revanche, l'appartement  $uA'$ , associé de  $uA$ , ne contient  $D'$  que si  $f \in k$ , ce qui entraîne  $uD' = D'$ . On voit donc que, lorsque  $f$  parcourt l'ensemble  $t \cdot k[t]$ , l'application  $f \mapsto uD'$  est une bijection de cet ensemble sur l'ensemble des demi-appartements associés à  $D$ .

La proposition suivante donne un aperçu de ce qui se passe en général.

5.4. PROPOSITION 6. — Soient  $D, D'$  des demi-appartements associés,  $d$  une cloison appartenant au bord de  $D$ ,  $c$  la chambre de  $D$  ayant  $d$  pour cloison et  $\mathcal{A}(D, D')$  l'ensemble des appartements de  $\Delta_+$  contenant  $D$  et dont l'associé



contient  $D'$ . Alors, la relation d'appartenance  $c_1 \in A$ , pour  $c_1 \in \text{Ét } d - \{c\}$ , définit une bijection de  $\text{Ét } d - \{c\}$  sur  $\mathcal{A}(D, D')$ .

5.5. Désormais, et sauf mention expresse du contraire, nous supposons que le système de Coxeter  $(W, S)$  ne possède pas de facteur direct de type  $A_1$ , c'est-à-dire qu'aucun élément de  $S$  n'est central dans  $W$ .

Avec les notations de 5.4, désignons par  $U(D, D')$  le groupe de tous les automorphismes du jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  qui fixent  $D$  et  $D'$  et l'étoile de toute cloison  $d_1$  intérieure à  $D$ , c'est-à-dire telle que l'ensemble  $\text{Ét } d_1 \cap D$  ait deux éléments. Le théorème suivant est conséquence immédiate du théorème 1, de la proposition 5.4 et du fait connu que, vu l'hypothèse faite sur le système de Coxeter  $(W, S)$ ,  $D$  possède une chambre dont toutes les cloisons sont intérieures à  $D$  :

THÉORÈME 2. — Avec les notations de 5.4, le groupe  $U(D, D')$  opère librement sur les ensembles  $\text{Ét } d - \{c\}$  et  $\mathcal{A}(D, D')$ .

5.6. Nous disons que le jumelage considéré est  $(D, D')$ -transitif si  $U(D, D')$  permute transitivement  $\mathcal{A}(D, D')$  (ou, ce qui revient au même,  $\text{Ét } d - \{c\}$ ), et que c'est un jumelage de Moufang (ou qu'il possède la propriété de Moufang) s'il est  $(D, D')$ -transitif pour tout couple  $(D, D')$  de demi-appartements associés.

## 6. Ensembles nilpotents de racines. Le système des $U_\alpha$

6.1. Soient  $\Sigma$  un complexe de Coxeter et  $\Phi$  l'ensemble de ses racines. Une partie  $\Psi$  de  $\Phi$  est dite nilpotente (resp. prénilpotente) s'il existe des ensembles de chambres  $X, X' \subset \text{Cham } \Sigma$  non vides tels que

$$\Psi = \{\alpha \in \Phi \mid X \subset \alpha, X' \subset -\alpha\}$$

(resp. si  $\Psi$  est contenu dans une partie nilpotente de  $\Phi$ ).

PROPOSITION 7. — Soit  $\Psi$  une partie nilpotente de  $\Phi$ . Alors

(i)  $\Psi$  est finie ;

(ii) il existe sur  $\Psi$  un ordre total  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  possédant la propriété

(\*)  $\{\alpha_i, \dots, \alpha_m\}$  est nilpotente quel que soit  $i, 1 \leq i \leq m$ .

6.2. Revenons au jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$ , choisissons pour toute la suite du § 6 un appartement  $A$  de  $\Delta_+$  dont l'associé est noté  $A'$  et l'ensemble de racines  $\Phi$  ; comme en 5.2, on note  $^\circ : A \rightarrow A'$  l'isomorphisme d'opposition, pour  $\alpha \in \Phi$  on pose  $\bar{\alpha} = -\alpha^\circ$  et  $U_\alpha = U(\alpha, \bar{\alpha})$  (cf. 5.5) et, pour toute partie  $\Psi$  de  $\Phi$ , on désigne par  $U_\Psi$  le groupe engendré par les  $U_\alpha, \alpha \in \Psi$ . Il est facile de voir, en utilisant la proposition 5 du n° 3.3, que si le jumelage  $(\Delta_+,$

$\Delta_-, w^*$  est  $(\alpha, \bar{\alpha})$  - transitif pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ , alors  $U_\Phi$  permute transitivement les couples de chambres opposées, d'où il résulte que  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  a la propriété de Moufang.

6.3. Pour  $\alpha, \beta \in \Phi$ , on note  $[\alpha, \beta]$  l'ensemble des racines  $\gamma$  telles que  $\gamma \supset \alpha \cap \beta$  et  $-\gamma \supset (-\alpha) \cap (-\beta)$ , et l'on pose  $]\alpha, \beta[ = [\alpha, \beta] - \{\alpha, \beta\}$ . Pour deux parties  $X, Y$  d'un groupe, on désigne par  $[X, Y]$  l'ensemble  $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x \in X, y \in Y\}$ .

PROPOSITION 8. — On suppose que le jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  possède la propriété de Moufang.

(i) Si  $\Psi = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  est un ensemble nilpotent de racines rangées dans un ordre satisfaisant à la condition (\*) de 6.2 (ii), l'application produit

$$\prod_{i=1}^m U_{\alpha_i} \rightarrow U_\Psi$$

est bijective.

(ii) Si  $\{\alpha, \beta\}$  est une paire de racines prénilpotente, les ensembles  $[\alpha, \beta]$  et  $]\alpha, \beta[$  sont nilpotents ; si, de plus,  $\alpha \neq \beta$ , on a

$$(2) \quad [U_\alpha, U_\beta] \subset U_{]\alpha, \beta[}.$$

6.4. Dans le cours de l'année prochaine, on donnera une présentation à la Steinberg du groupe  $U_\Phi$ , dans laquelle les relations de commutation exprimant (2) joueront un rôle primordial. Lorsque  $\Phi$  est fini, une paire de racines  $\{\alpha, \beta\}$  est prénilpotente si et seulement si  $\beta \neq -\alpha$  ; on a donc un grand nombre de relations de commutation du type en question. Dans le cas général, la situation est moins bonne mais la proposition suivante, dont la preuve est très facile, montre qu'il y a encore beaucoup de paires prénilpotentes.

PROPOSITION 9. — Soient  $\alpha, \beta \in \Phi$ .

(i) Si  $\{\alpha, \beta\}$  n'est pas prénilpotente, on a  $\alpha \supset -\beta$  ou  $\beta \supset -\alpha$ .

(ii) Deux au moins des quatre paires  $\{\pm \alpha, \pm \beta\}$  sont prénilpotentes.

On peut se demander si, lorsque la paire  $\{\alpha, \beta\}$  n'est pas prénilpotente, il peut encore exister des relations intéressantes entre  $U_\alpha$  et  $U_\beta$ . En général, il n'en est rien : on verra l'an prochain que si  $\alpha \neq -\beta$  et si  $\{\alpha, \beta\}$  n'est pas prénilpotente, alors  $U_\alpha$  et  $U_\beta$  engendrent leur produit libre dans  $U_\Phi$ .

## 7. Construction de jumelages à partir de BN-paires jumelées

7.1. Soient  $G$  un groupe opérant sur  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  et transitif sur les couples de chambres opposées,  $B_+, B_-$  les stabilisateurs dans  $G$  de deux chambres opposées  $c \in \text{Cham } \Delta_+, c' \in \text{Cham } \Delta_-$ ,  $N$  le stabilisateur de l'appartement  $A(c, c')$  (cf. 3.2) et  $\nu : N \rightarrow W$  l'homomorphisme défini par

$\nu(n) = w(c, nc)$ . Le jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  est déterminé par les données  $G, B_+, B_-, N, \nu$ . En effet, il est facile de voir que, pour  $\varepsilon = +$  ou  $-$ ,

(C1) Cham  $\Delta_\varepsilon = G/B_\varepsilon$ ,

(C2) si  $x, y \in G/B_\varepsilon$ , l'élément  $w = w(x, y)$  de  $W$  est caractérisé par la relation  $x^{-1}y = B_\varepsilon \cdot \nu^{-1}(w) \cdot B_\varepsilon$ ,

(C3) si  $x \in G/B_+$  et  $y \in G/B_-$ , l'élément  $w = w^*(x, y)$  de  $W$  est caractérisé par la relation  $x^{-1}y = B_+ \cdot \nu^{-1}(w) \cdot B_-$ .

7.2. Inversement, soient  $G$  un groupe,  $B_+, B_-, N$  trois sous-groupes et  $\nu : N \rightarrow W$  un épimorphisme. On montre que les conditions (BNJ 1) à (BNJ 5) ci-dessous sont nécessaires et suffisantes pour que (C1), (C2), (C3) définissent effectivement un jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, w^*)$  (d'immeubles *épais*) et qu'il existe des chambres opposées  $c \in \text{Cham } \Delta_+, c' \in \text{Cham } \Delta_-$  telles que  $B_+, B_-, N$  et  $\nu$  soient définis comme en 7.1 (le groupe  $G$  opérant sur  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  en vertu de (C1) et (C2)). Dans l'énoncé de ces conditions,  $\varepsilon = +$  ou  $-$ ,  $s \in S, w \in W$  (les conditions devant être satisfaites quels que soient  $s$  et  $w$ ) et, pour  $x \in W$ , les produits  $\nu^{-1}(x)B_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon\nu^{-1}(x)$  sont simplement notés  $xB_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon x$  (ce sont des classes latérales de  $B_\varepsilon$  dans  $G$  dès que (BNJ 1) est satisfait).

(BNJ 1)  $B_+ \cap B_- = \text{Ker } \nu$ ,

(BNJ 2)  $sB_+ \cap B_- = \emptyset$ ,

(BNJ 3)  $sB_\varepsilon s \not\subset B_\varepsilon$ ,

(BNJ 4)  $sB_\varepsilon w B_\varepsilon \subset B_\varepsilon w B_\varepsilon \cup B_\varepsilon s w B_\varepsilon$ ,

(BNJ 5) si  $l(sw) = l(w) - 1$ ,  $sB_\varepsilon w B_{-\varepsilon} = B_\varepsilon s w B_{-\varepsilon}$ .

7.3. *Remarques.* (a) Le résultat précédent fournit un procédé de construction de jumelages applicable en principe à tous les jumelages dont le groupe d'automorphismes permute transitivement les couples de chambres opposées. Il permet de prouver les assertions de 2.3 (c) et 2.3 (d) (mais il peut être plus commode, pour cela, d'utiliser le § 8).

(b) On peut montrer que, moyennant les axiomes BNJ, le système  $(G, B_+, B_-)$  détermine (à isomorphisme *unique* près) le système de Coxeter  $(W, S)$ , le groupe  $N$  et le monomorphisme  $\nu$ .

On a

(BNJ 1')  $B_+ \cap N = B_- \cap N = B_+ \cap B_-$ .

(c) En particulier, vu (BNJ 1),  $B_\varepsilon \cap N$  est un sous-groupe normal de  $N$ . Joins à ce fait, (BNJ 3) et (BNJ 4) expriment que  $(B_+, N)$  et  $(B_-, N)$  sont des BN-paires dans  $G$ . On est ainsi amené à définir des BN-paires jumelées dans un groupe  $G$  comme des BN-paires  $(B_+, N), (B_-, N)$  satisfaisant à (BNJ 1'), (BNJ 2) et (BNJ 5) (cette dernière condition a un sens parce que, vu (BNJ 1'), les deux BN-paires définissent le même système de Coxeter  $(W, S)$ ).

### 8. Construction d'un jumelage de Moufang à partir d'un système $(U_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$

8.1. Dans ce paragraphe,  $\Phi$  désigne l'ensemble des racines du complexe de Coxeter standard  $\Sigma(M)$  (cf. 1.2). Une racine est dite *positive* ou *négative* selon qu'elle contient ou non la chambre 1, et l'on note  $\Phi_0$  l'ensemble des *racines simples*, c'est-à-dire des racines positives dont le bord contient une cloison de 1.

Reprenons les notations et conventions de 6.2 mais, pour concilier les deux emplois de la notation  $\Phi$ , identifions l'appartenance choisi  $A$  de  $\Delta_+$  avec  $\Sigma(M)$  par le choix d'une « chambre origine »  $c$ , identifiée à la chambre 1. Rappelons que, pour  $\alpha \in \Phi$ ,  $\bar{\alpha} = -\alpha^\circ$  et  $U_\alpha = U(\alpha, \bar{\alpha})$ . Soient  $G$  un groupe d'automorphismes du jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, \mathfrak{w}^*)$  contenant les  $U_\alpha$ ,  $T$  l'intersection des normalisateurs des  $U_\alpha$  dans  $G$ ,  $B_+$  (resp.  $B_-$ ; resp.  $N$ ) le stabilisateur dans  $G$  de  $c$  (resp.  $c^\circ$ ; resp.  $A$ ) et  $\nu : N \rightarrow W$  l'homomorphisme défini par la relation  $\nu(n) = \mathfrak{w}(c, nc)$ .

PROPOSITION 10. — *Si le jumelage  $(\Delta_+, \Delta_-, \mathfrak{w}^*)$  possède la propriété de Moufang, le groupe  $G$  permute transitivement les couples de chambres opposées,  $B_+$  (resp.  $B_-$ ) est engendré par  $T$  et les  $U_\alpha$  pour  $\alpha$  positif (resp. négatif),  $N$  est le normalisateur dans  $G$  de l'ensemble des  $U_\alpha$  et  $\nu$  est caractérisé par la relation  $nU_\alpha n^{-1} = U_{\nu(n)(\alpha)}$ , pour  $n \in N$  et  $\alpha \in \Phi$ .*

Vu 7.1, cela montre que le jumelage de Moufang considéré est déterminé par le système  $(G; (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi})$ . Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel système fournisse effectivement un jumelage de Moufang.

8.2. THÉORÈME 3. — *Pour qu'un système  $(G; (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi})$  formé d'un groupe et d'une famille de sous-groupes indexée par  $\Phi$  soit isomorphe au système obtenu de la façon décrite plus haut à partir d'un jumelage de Moufang et d'un groupe d'automorphismes de celui-ci contenant les  $U_\alpha$ , il faut et il suffit qu'il remplisse les conditions suivantes, où  $T$  désigne l'intersection des normalisateurs des  $U_\alpha$  dans  $G$  :*

$$(DR 1) \quad G = T \cdot \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle ;$$

$$(DR 2) \quad U_\alpha \neq \{1\} \text{ pour tout } \alpha ;$$

(DR 3) *pour  $\alpha \in \Phi_0$  et  $u \in U_\alpha - \{1\}$ , il existe des éléments  $u'$ ,  $u'' \in U_-$  tels que, pour toute racine  $\beta$ , le produit  $u'uu''$  conjugue  $U_\beta$  en  $U_{s(\beta)}$ , où  $s \in S$  est la réflexion fixant  $\partial\alpha$  ;*

$$(DR 4) \quad \text{pour } \alpha \in \Phi_0, \text{ on a } U_{-\alpha} \not\subset \langle U_\beta \mid \beta > 0 \rangle ;$$

(DR 5) *si  $\{\alpha, \beta\}$  est une paire prénilpotente de racines distinctes, on a  $[U_\alpha, U_\beta] \subset U_{|\alpha, \beta|}$  (avec les notations de 6.3) ;*

(DR 6) *le groupe  $T$  ne contient pas de sous-groupe distingué non trivial de  $G$ .*

8.3. *Remarques.* (a) Avec les notations de (DR 3), on doit avoir  $(u'uu'')(c) = sc$  et  $(u'uu'')(sc) = c$ , d'où  $u'(uc) = sc$  et  $u''(sc) = u^{-1}c$ , ce qui montre que les éléments  $u'$  et  $u''$  sont *uniques*.

(b) Supposons que le système  $(G ; (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi})$  remplisse seulement les conditions (DR 1) à (DR 5), mais non (DR 6), notons  $T_0$  le plus grand sous-groupe distingué de  $G$  contenu dans  $T$ , posons  $G' = G/T_0$  et soit  $U'_\alpha$  la projection canonique de  $U_\alpha$  dans  $G'$ . On montre que  $T_0 \cap U_\alpha = \{1\}$  et que  $T/T_0$  est l'intersection des normalisateurs des  $U'_\alpha$  dans  $G'$ . Il s'ensuit que le système  $(G' ; (U'_\alpha)_{\alpha \in \Phi})$  satisfait aux conditions (DR 1) à (DR 6). Ainsi, le système de départ fournit encore un jumelage de Moufang sur lequel  $G$  opère, mais cette opération n'est plus fidèle.

(c) Le théorème 3 permet de démontrer simplement les assertions de 2.3 (c) et 2.3 (d). Il fournit un procédé de construction de jumelages de Moufang applicable en principe à tous les jumelages de ce type. Cela se concrétisera un peu au numéro suivant dans le cas particulier des arbres jumelés.

9. Le cas  $M = \binom{1}{\infty} \tilde{\gamma}$  : arbres jumelés de Moufang

Pour terminer, nous illustrons les résultats précédents en donnant un procédé de construction qui permet, *au moins en principe* (voir à ce sujet la remarque finale du résumé), d'obtenir tous les systèmes  $(G ; (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi})$  satisfaisant aux axiomes (DR 1) à (DR 5) dans le cas particulier où  $M = \binom{1}{\infty} \tilde{\gamma}$ , hypothèse que nous faisons désormais.

Pour le type  $M$  en question, le complexe de Coxeter  $\Sigma = \Sigma(M)$  peut être réalisé comme la décomposition simpliciale de la droite  $\mathbf{R}$  des nombres réels par les points entiers, les chambres étant les segments  $[z, z + 1]$  avec  $z \in \mathbf{Z}$  et  $W$  se composant des translations d'amplitude paire et des réflexions par rapport aux points entiers. On suppose, sans nuire à la généralité, que  $S$  est formé des réflexions par rapport à 0 et 1. Les racines, éléments de  $\Phi$ , sont les demi-droites

$$\alpha_z = [-z, \infty) \text{ et } -\alpha_z = (-\infty, -z] \quad (z \in \mathbf{Z}).$$

On pose  $U_{\alpha_z} = U_z$  et  $U_{-\alpha_z} = U'_z$ . Venons-en finalement à la description des étapes successives de la construction annoncée des systèmes  $(G ; (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi})$ .

(I) On choisit pour commencer « deux systèmes de rang 1  $(G_i, (U_i, U'_i))_{i=0,1}$ , ayant même groupe  $T$  » : cela veut dire que les deux systèmes en question satisfont aux axiomes (DR 1) à (DR 4) (ce dernier signifiant simplement ici que  $U_i \neq U'_i$ ), que l'intersection des normalisateurs de  $U_0$  et  $U'_0$  dans  $G_0$  est isomorphe à l'intersection des normalisateurs de  $U_1$  et  $U'_1$  dans  $G_1$  et que l'on choisit un isomorphisme entre ces deux intersections qui sont alors identifiées

et notées  $T$ . (Une façon possible — mais non la seule ni toujours la plus intéressante — de réaliser ces choix consiste à choisir *arbitrairement* deux systèmes de rang 1  $(H_i, (U_i, U'_i))$  et, notant  $T_i$  l'intersection des normalisateurs de  $U_i$  et  $U'_i$  dans  $H_i$ , à prendre  $G_0 = H_0 \times T_1$  et  $G_1 = H_1 \times T_0$ .

(II) Pour  $i = 1, 2$ , soit  $N_i$  le normalisateur dans  $G_i$  de la paire de sous-groupes  $\{U_i, U'_i\}$  : il a  $T$  comme sous-groupe d'indice 2. Soit  $N$  le produit amalgamé  $N_1 *_T N_2$ . On a  $N/T = W$  et l'on voit aisément qu'il existe un et, à isomorphisme unique près, un seul système de groupes  $(U_z, U'_z)_{z \in \mathbb{Z}}$  et une opération de  $N$  sur ce système tels que, pour  $i = 1, 2$ ,  $M_i = N_i - T$  permute  $U_z$  et  $U'_{2z-i}$  et opère sur  $U_i, U'_i$  par conjugaison à l'intérieur de  $G_i$ . Ces conditions impliquent évidemment que  $T$  normalise les  $U_z$  et les  $U'_z$ .

(III) Soient  $U_{++}$  le produit direct *ensembliste* restreint  $\prod'_{y=1}^{\infty} U_y$ , c'est-à-dire l'ensemble des suites  $(u_y)_{1 \leq y < \infty}$  telles que  $u_y \in U_y$  pour tout  $y$  et  $u_y = 1$  presque partout. Soit  $n$  un élément de  $M_1 M_0$  arbitrairement choisi. L'étape suivante consiste à choisir dans  $U_{++}$  une loi de groupe stable par  $T$ , telle que  $n$  (qui applique  $U_{++}$  sur  $\prod'_{y=3}^{\infty} U_y \subset U_{++}$ ) en soit un endomorphisme, que les injections canoniques  $U_z \rightarrow U_{++}$  soient des homomorphismes et que, pour  $0 < z < z'$ , on ait

$$[U_z, U_{z'}] \subset \prod'_{y=z+1}^{z'-1} U_y.$$

Notons qu'une telle loi de groupe existe toujours : on peut en effet prendre pour  $U_{++}$  le *produit direct* (restreint) *des groupes*  $U_y$  ( $1 \leq y < \infty$ ).

(IV) En transportant la structure de groupe de  $U_{++}$  par les éléments de  $N$ , on en déduit des lois de groupes stables par  $T$  sur chacun des ensembles

$$U_{[z, \infty)} = \prod'_{y=z}^{\infty} U_y \text{ et } U'_{(-\infty, z]} = \prod'_{y=-\infty}^z U'_y. \text{ Posons alors}$$

$$B_+ = (U_{++} * U'_{(-\infty, 0)}) \rtimes T,$$

$$P_i = G_i *_{T U_i} (U_{[i, \infty)} \rtimes T) \quad (i = 0, 1),$$

$$\text{et } G = P_0 *_{B_+} P_1,$$

où les étoiles désignent des produits libres ou des produits amalgamés selon ce qu'indique la notation. Dans le groupe  $G$  ainsi obtenu sont inclus de façon évidente les groupes  $G_i$ , donc les groupes  $U_i, U'_i, N_i$  (pour  $i = 1, 2$ ), et aussi  $N = N_1 * N_2$ . On vérifie aussitôt que les inclusions de  $U_i, U'_i$  dans  $G$  se prolongent, de façon évidemment unique, en une inclusion du système  $(U_z, U'_z)_{z \in \mathbb{Z}}$  compatible avec l'action de  $N$  (sur ce système par sa définition même, et sur  $G$  par conjugaison), et que le système  $(G; (U_z, U'_z)_{z \in \mathbb{Z}})$  satisfait aux conditions (DR 1) à (DR 5). De plus, on obtient ainsi *tous* les systèmes

en question, c'est-à-dire que les choix qu'on a fait pour  $B_+$ ,  $P_0$ ,  $P_1$  et  $G$  sont en fait imposés par les axiomes DR : c'est un cas particulier d'un théorème qui sera établi dans le cours de l'an prochain, et auquel il a déjà été fait allusion en 6.4 (on peut aussi se référer à l'article du *Journal of Algebra* cité en 2.3 (c) et, pour la relation  $G = P_0 *_{B_+} P_1$ , au § 13 des *Lectures Notes* citées au début du § 4 ci-dessus).

*Remarque.* Nous avons annoncé, au début de ce paragraphe, un procédé de construction permettant de déterminer « en principe » tous les systèmes  $(G, (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi})$  satisfaisant aux axiomes (DR 1) à (DR 5) pour  $M = \begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}$ . Il serait plus exact de dire que nous avons ramené cette détermination à celle des « systèmes de rang 1 » (voir (I)) et à celle des structures de groupes sur  $U_{++}$  satisfaisant aux conditions formulées en (II). Le premier de ces problèmes est manifestement trop compliqué pour qu'on puisse songer à le résoudre en toute généralité. Rappelons toutefois que l'on connaît plusieurs classes intéressantes de systèmes de rang 1 et que, dans le cas fini (correspondant ici au cas des arbres localement finis), on dispose effectivement d'une classification complète. En ce qui concerne le second problème, j'ignore quel est son réel degré de difficulté. Je crois que, comme pour le premier, une solution générale n'est pas envisageable. On a déjà observé que, quels que soient les choix initiaux (choix des  $U_i$ ,  $U'_i$ ), le problème possède toujours au moins une solution, pour ainsi dire banale, à savoir le produit direct restreint des groupes  $U_y$  ; pour des  $U_i$ ,  $U'_i$  particuliers, d'autres solutions sont fournies par la théorie de Kac-Moody et sa variante de Ree-Suzuki, due à J.-Y. Hée. Il serait sans doute intéressant de mieux comprendre ces exemples et de voir s'ils s'inscrivent dans un schéma plus général.

J.T.

#### MISSIONS ET CONFÉRENCES

##### *Exposés*

— *Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody*, Séminaire Bourbaki, Paris, novembre 1988.

— *p-adische Gruppen als unendlichdimensionale Gruppen über dem Restklassenkörper*, Aix-la-Chapelle, décembre 1988.

— *Twin buildings*, Workshop on arithmetic groups and buildings, M.S.R.I., Berkeley, mai 1989.

— *Structure des groupes de points rationnels des groupes algébriques semi-simples sur les corps globaux*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, mai 1989.

- *Doppelgebäude und Kac-Moody Gruppen*, Stuttgart, juin 1989.
- *Automorphismengruppen von Bäumen*, Erlangen, juin 1989.
- *Die Klassifizierung einfacher algebraischer Gruppen*, Bayreuth, juin 1989.

#### DISTINCTIONS

Membre étranger de l'Académie Royale Néerlandaise des Sciences, 1988.  
Membre du Conseil exécutif et membre fondateur de l'Academia Europaea, 1988.